

香港中學文憑考試
數學 延伸部分
單元二(代數與微積分)

2014 年 11 月



香港考試及評核局
Hong Kong
Examinations and
Assessment Authority

內容簡介

- 考試形式
- 題目介紹
- 評卷參考
- 考生表現
- 答卷示例
- 一般建議



考試形式

- 考試時間：2 小時 30 分鐘
- 本單元只考一卷
- 本卷分為兩部，全部題目均須作答
- 考生須具有必修部分及初中課程基礎部分與非基礎部分的知識



題目介紹 – 題 4

設 $x = 2y + \sin y$ 。求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ，答案以 y 表示。

- 需使用鏈式法則
- 或需運用反函數定理



題目介紹 – 題 5

(a) 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$ ，其中 $x < 9$ 。

(b) 利用代換積分法，求 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ ，其中 $-3 < x < 3$ 。

- 需計算不定積分
- 需使用代換積分法及三角代換

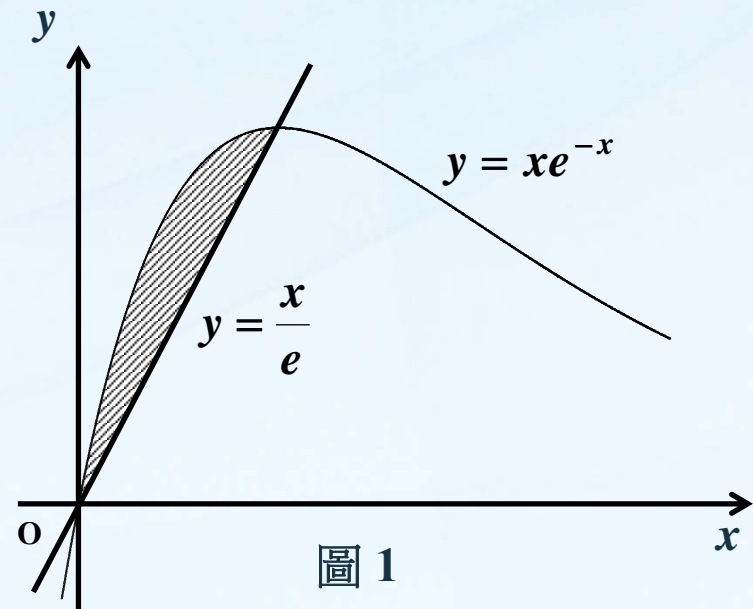


題目介紹 – 題 6

(a) 求 $\int xe^{-x} dx$ 。

(b) 圖 1 顯示由曲線 $y = xe^{-x}$ 和直線 $y = \frac{x}{e}$ 圍成的陰影區域。求陰影區域的面積。

- 需使用分部積分法
- 需運用定積分求兩曲線圍成的陰影區域面積



題目介紹 – 題 8

設 $\vec{OP} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 、 $\vec{OQ} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 和
 $\vec{OR} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 。

- (a) 求 $\vec{OP} \times \vec{OQ}$ 。由此求四面體 $OPQR$ 的體積。
- (b) 求平面 OPQ 與直線 OR 之間的銳角，準確至最接近的 0.1° 。

- 需計算向量積
- 需運用公式計算四面體的體積
- 需計算直線與平面之間的夾角



題目介紹 – 題 9

(a) 解線性方程組
$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x + 6y + 10z = 200 \end{cases}$$
。

(b) 在某店鋪內，小、中、大三款彈珠每顆的價錢分別為 \$0.5、\$3 和 \$5。夢華計劃用盡 \$100 購買恰好 100 顆彈珠，當中包括 m 顆小彈珠、 n 顆中彈珠和 k 顆大彈珠。

夢華聲稱只有一套 m 、 n 和 k 的組合。你是否同意？解釋你的答案。



- 需處理有無窮多個解的線性方程組
- 需考慮方程組的正整數解

題目介紹 – 題 12

設 $M = \begin{pmatrix} k-1 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，其中 k 和 p 為實數，且 $p \neq -1$ 。

(a)(i) 求 A^{-1} ，答案以 p 表示。

(ii) 證明 $A^{-1}MA = \begin{pmatrix} -1 & k-p \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 。

(iii) 假設 $p = k$ 。利用 (ii) 求 M^n ，答案以 k 和 n 表示，其中 n 為正整數。



● 需計算逆矩陣

● 需運用矩陣的乘法結合律求 M^n

題目介紹 – 題 12 (續)

(b) 定義一數列為

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ 和 $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ 對 $n = 3, 4, 5, \dots$ 。

已知此數列可以表示為矩陣形式 $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$ 。

利用 (a)(iii) 的結果，以 n 表 x_n 。

- 綜合不同課題：矩陣及數列
- 需於不熟悉的情境理解及運用各課題中的概念、運算及其性質



評卷參考－題 4

1M : 給 $\frac{dx}{dy} = 2 + \cos y$

1M : 給應用鏈式法則

1A : 給正確答案



評卷參考 – 題 5

- (a) 1M : 給代換積分法
1A : 給寫出正確的不定積分
1A : 給正確答案
- (b) 1M : 給代換 $x = 3 \sin \theta$
1A : 給寫出 $\int d\theta$
1A : 給正確答案



評卷參考 – 題 6

(a) 1M : 給寫出 $\int xe^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx$

1A : 給正確答案

(b) 1A : 給 $x = 1$

1M : 給寫出 $\int_0^1 \left(xe^{-x} - \frac{x}{e} \right) dx$

1M : 給利用 (a) 部答案計算定積分

1A : 給正確答案



評卷參考 – 題 8

(a) 1A : 給正確答案

1M : 給 $\frac{1}{6} |(6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})|$

1A : 給正確答案

(b) 1A : 給 $OR = 7$

1A : 給 ΔOPQ 的面積 $= \frac{\sqrt{53}}{2}$

1M : 給求四面體的高
 $\frac{6}{\sqrt{53}}$

1M : 給 $\sin \theta = \frac{\sqrt{53}}{7}$

1A : 給正確答案



評卷參考－題 9

(a) 1M : 給增廣矩陣寫成 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 5 & 9 & 100 \end{array} \right)$

1A : 給正確答案 $x = 80 + \frac{4t}{5}$

1A : 給正確答案 $y = 20 - \frac{9t}{5}$

(b) 1A : 給方程組 $\begin{cases} m + n + k = 100 \\ 0.5m + 3n + 5k = 100 \end{cases}$

1M : 給指出方程組有三個整數解

1 : 給正確結論



評卷參考 – 題 12

(a)(i) 1M : 給 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$

1A : 給正確答案

(ii) 1M+1A : 給利用(a)(i)答案進行矩陣乘法

1 : 給正確結論

(iii) 1M : 給等式兩邊中任何一邊

1M : 給 $A^{-1}M^nA = B \Rightarrow M^n = ABA^{-1}$

1A : 給正確答案



評卷參考 – 題 12 (續)

(b) 1M : 給寫出
$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix}$$

1A : 給
$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

1A : 給正確答案



考生表現

級別	2013百分率	2014百分率
第5**級	3.3%	3.4%
第5*級或以上	13.1%	15.1%
第5級或以上	32.7%	36.2%
第4級或以上	58.2%	62.5%
第3級或以上	81.3%	82.4%
第2級或以上	92.8%	93.2%
第1級或以上	98.3%	98.1%



考生表現 – 題 4

- 整體表現令人滿意。
- 考生有以下錯誤概念：

$$1. \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\frac{d^2 x}{dy^2}} ;$$

$$2. \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 .$$



考生表現 – 題 6

- 在(a)，整體表現優異。

- 在(b)，整體表現良好。

一些考生錯誤把 $\int xe^{-1}dx$ 當作為必須透過分部積分法而得的積分。



考生表現 – 題 8

- 在(a)，整體表現尚可。

部分考生把四面體當作為平行六面體。

很多考生誤把體積當作為 $\frac{1}{3} |(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OR}|$ 。



考生表現 – 題 8 (續)

- 在(b)，整體表現欠佳。
部分考生嘗試透過考慮(a)部分的四面體高度來求有關的角，但卻因為誤解四面體與對應平行六面體的關係而未能求有關的角。
- 部分考生開始時求 $\vec{OP} \times \vec{OQ}$ 與 \vec{OR} 兩個向量之間的角，但在求得 96.8° 之後卻未能繼續完成答題。部分考生利用 PQ 的中點或在 PQ 上的高度 OA 錯誤定出角的位置。




考生表現 – 題 12

- 在(a)(i)，整體表現優異。少數考生錯誤背記公式，例如 $A^{-1} = \text{adj } A$ 、 $A^{-1} = \frac{A^t}{|A|}$ 。

- 在(a)(ii)，整體表現良好。

大部分在(a)(i)能夠證明已知的恆等式的考生，都能夠求得正確的逆矩陣，但大部分考生沒有清楚顯示最後的步驟，而只是寫下已知的結果


$$\frac{1}{1+p} \begin{pmatrix} k-p-1 & k \\ k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & k-p \\ 0 & k \end{pmatrix}。$$

考生表現 – 題 12 (續)

- 在(a)(iii)，整體表現令人滿意。

考生經常出現計算上的錯誤。部分考生沒有代入所有 ‘ p ’ 為 ‘ k ’。部分錯誤概念包括

$$\begin{pmatrix} -1 & k-p \\ 0 & k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (k-p)^n \\ 0 & k^n \end{pmatrix}, (A^{-1}MA)^n = A^{-n}M^nA^n。$$



考生表現 – 題 12 (續)

- 在(b)，整體表現差劣。

部分考生給出 x_n 的答案為矩陣。只有少數考生懂得找出答案。考生經常出現計算上的

錯誤，例如
$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}。$$



答卷示例

http://www.hkeaa.edu.hk/tc/hkdse/hkdse_subj.html?A1&1&4

The screenshot displays the Hong Kong Examinations and Assessment Authority (HKEAA) website. At the top, the HKEAA logo and name are visible, along with navigation links for English, text version, contact, common questions, website guide, RSS, and search. A search bar is present on the right. Below the header, a blue navigation bar contains links for Home, About Us, Resources, Online Services, News, Vacancies, and Bidding. The main content area features a banner for 'Hong Kong Certificate of Education Examination' (香港中學文憑) with a photo of students. A sidebar on the left lists various examination categories, with 'Candidate Performance Examples' (考生表現示例) highlighted in red. The main content area lists resources for 'Mathematics' (數學) under the 'Type A - New High School Core Subjects' (甲類 - 新高中核心科目) category, including 'Assessment Outline' (評核大綱), 'Curriculum and Assessment Guide' (課程及評估指引), 'Candidate Performance Examples' (考生表現示例), 'Practice Papers' (練習卷), 'Sample Papers' (樣本試卷), 'Level Description' (等級描述), 'Other Resources' (其他資源), and 'Common Questions' (常見問題). A right sidebar contains 'Focus Points' (關注焦點) for the Hong Kong Certificate of Education Examination, including 'New High School Curriculum and Assessment Review' (新高中課程及評估檢討), 'International Recognition' (國際認可), and '2013 Hong Kong Certificate of Education Examination Mobile Application' (2013香港中學文憑考試手機應用程式). A list of links for the Hong Kong Certificate of Education Examination is also provided, including 'Introduction' (簡介), 'Important Dates' (重要日期), 'Exam Timetable' (考試時間表), 'Exam Registration' (考試報名), 'Exam Fees' (考試費用), 'Candidate Handbook' (考生手冊), 'Exam Rules' (考試規則), and 'Report on Examination Results' (報告考試異堂情況).



一般評論及建議

處理微積分時，考生應充分掌握基本概念及公式。
他們應

- 在不定積分的答案加入任意常數；
- 明白負變率顯示數量隨時間而減少；
- 在旋轉體體積的公式不要遺漏 ‘ π ’ 。



一般評論及建議

處理向量時，考生應

- 寫出適當記號，例如向量符號、純量及向量乘法符號；
- 緊記平行四邊形面積、平行六面體和四面體的體積的公式。

處理方程組時，考生必須熟悉解的不同條件，以及它們與對應係數矩陣或增廣矩陣的相關性質。



謝謝!



香港考試及評核局
Hong Kong
Examinations and
Assessment Authority