

香港中學文憑考試
數學 延伸部分
單元二 (代數與微積分)

2013 年 10 月



香港考試及評核局
Hong Kong
Examinations and
Assessment Authority

內容簡介

- 考試形式
- 題目介紹
- 評卷參考
- 考生表現
- 答卷示例
- 一般建議



考試形式

- 考試時間：2 小時 30 分鐘
- 本單元只考一卷
- 本卷分爲兩部，全部題目均須作答
- 學生須具有必修部分及初中課程基礎部分與非基礎部分的知識



題目介紹 – 題 1

從基本原理求 $\frac{d}{dx}(\sin 2x)$ 。

- 需利用極限求導數
- 需利用「和化積公式」



題目介紹 – 題 5

考慮一連續函數 $f(x) = \frac{3-3x^2}{3+x^2}$ 。已知

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+

(「+」與「-」分別標示「正值」與「負值」。)

- 求所有極大及/或極小點和拐點。
- 求 $y = f(x)$ 的圖像的漸近線。
- 描繪 $y = f(x)$ 的圖像。
 - 需利用一階導數判別法求極大或極小點
 - 需處理有理函數的曲線的漸近線及其圖像

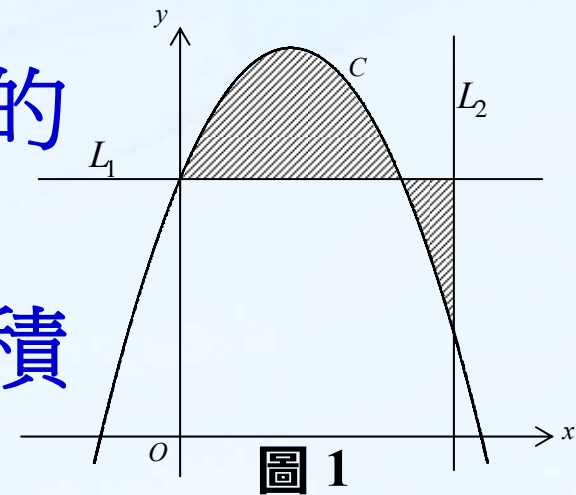


題目介紹 – 題 6

圖 1 顯示由 $C: y = \frac{-x^2}{2} + 2x + 4$ 、 $L_1: y = 4$ 和 $L_2: x = 5$ 圍成的陰影區域。已知 C 與 L_1 相交於 $(0, 4)$ 和 $(4, 4)$ 。

- (a) 求陰影區域的面積。
- (b) 求把陰影區域繞 L_1 旋轉所得旋轉體的體積。

- 需利用定積分求兩曲線圍成的陰影區域面積
- 需利用定積分求旋轉體的體積



題目介紹 – 題 9

考慮下列 x 、 y 和 z 的線性方程組

$$(E) \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ 2x + (1-2a)y + (2-b)z = a+4 \\ 3x + (1-3a)y + (3-ab)z = 4 \end{cases}, \text{ 其中 } a \text{ 和 } b \text{ 爲實數。}$$

已知 (E) 有無窮多個解。

(a) 求 a 和 b 的值。

(b) 解 (E) 。

- 需利用高斯消去法或行列式處理線性方程組
- 需理解方程組有無窮多個解時的處理方法



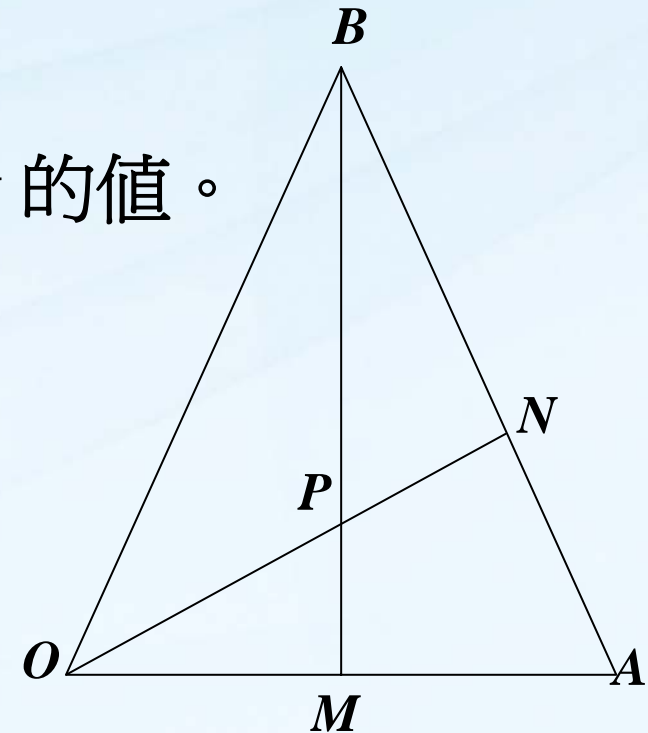
題目介紹 – 題 10

設 $\vec{OA} = 2\mathbf{i}$ 和 $\vec{OB} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 。 M 為 OA 的中點，而 N 則在 AB 上使得 $BN : NA = k : 1$ 。 BM 與 ON 相交於 P 。

(a) 以 k 表 \vec{ON} 。

(b) 若 A 、 N 、 P 與 M 共圓，求 k 的值。

- 需利用截點公式
- 需利用兩個向量互相垂直，它們的點積等於零



題目介紹 – 題 13

對於任意 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 矩陣，定義 $\text{tr}(M) = a + d$ 。

設 A 和 B 為 2×2 矩陣，使得 $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 。

(a)(i) 對於任意矩陣 $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ，證明 $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$ 。

(ii) 證明 $\text{tr}(A) = 4$ 。

(iii) 求 $|A|$ 的值。

(b) 設 $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 。已知對於某些非零矩陣 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 和相異純量 λ_1 和 λ_2 ， $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 和 $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 。



題目介紹 – 題 13 (續)

(b)(i) 證明 $\begin{vmatrix} p - \lambda_1 & q \\ r & s - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0$ 和 $\begin{vmatrix} p - \lambda_2 & q \\ r & s - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$ 。

(ii) 證明 λ_1 和 λ_2 為方程 $\lambda^2 - \text{tr}(C) \cdot \lambda + |C| = 0$ 的根。

(c) 求 λ 的兩值使得對於某些非零矩陣 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 。

- 綜合不同課題：矩陣、行列式及線性方程組
- 需於不熟悉的情境 (例： $\text{tr}(M)$) 理解及運用各課題中的概念、運算及其性質
- 使用適當的策略提供數學證明



評卷參考－題 1

1M：給從基本原理求導數

1M：給利用「和化積公式」處理三角數式

1M：給利用 $\lim_{h \rightarrow 0} \left(f(h) \frac{\sin h}{h} \right) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} f(h) \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right)$

1A：給正確答案



評卷參考－題 5

(a) 1A : 給極大點 = (0, 1)

1A : 給拐點

(b) 1M : 給 $f(x) = -3 + \frac{12}{x^2 + 3}$

1A : 給正確答案

(c) 1A : 給 $y = f(x)$ 圖像的形狀

1A : 給所有資料皆正確



評卷參考－題 6

(a) 1M：給利用定積分計算面積

1M：給計算不定積分

1A：給正確答案

(b) 1M + 1A：給利用定積分計算旋轉體的體積

1A：給正確答案



評卷參考－題 9

(a) 1M : 給增廣矩陣 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & 2 \\ 2 & 1-2a & 2-b & a+4 \\ 3 & 1-3a & 3-ab & 4 \end{array} \right)$ 寫成

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -b & a \\ 0 & 1 & -ab & -2 \end{array} \right)$$

1M : 給 $\begin{cases} b(a-1) = 0 \\ a+2 = 0 \end{cases}$

1A : 給兩個正確答案

(b) 1M : 給代 $a = -2, b = 0$ 入方程組

 1A : 給正確答案

評卷參考－題 10

(a) 1M：給利用截點公式

1A：給正確答案

(b) 1M：給 $BM \perp OA$

1M：給 $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

1A：給正確答案



評卷參考 – 題 13

(a)(i) 1A : 給 $\text{tr}(MN)$ 或 $\text{tr}(NM)$

1 : 給完成證明

(ii) 1M : 給利用 **(a)(i)** 的結果寫出 $\text{tr}(AB^{-1}B) = 4$

1 : 給完成證明

(iii) 1M : 給利用定理 $|MN| = |M||N|$

1A : 給正確答案



評卷參考 – 題 13(續)

(b)(i) 1A : 給將方程組寫成 $\begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{pmatrix}$

1 : 給完成證明

1 : 給考慮另一情況而完成證明

(ii) 1M : 給利用 **(b)(i)** 寫出

$$\lambda_1 \text{ 和 } \lambda_2 \text{ 滿足方程 } \begin{vmatrix} p - \lambda & q \\ r & s - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

1 : 給完成證明

(c) 1M : 給利用 **(b)(ii)** 寫出 $\lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + |A| = 0$

1A : 給正確答案



考生表現

級別	2012百分率	2013百分率
第5**級	3.1%	3.3%
第5*級或以上	12.1%	13.1%
第5級或以上	31.5%	32.7%
第4級或以上	56.1%	58.2%
第3級或以上	79.8%	81.3%
第2級或以上	92.5%	92.8%
第1級或以上	98.1%	98.3%



考生表現 – 題 1

- 整體表現令人滿意。
- 大部分考生從基本原理求導數時懂得基礎公式，並且運用「和化積公式」處理三角數式，但很多考生卻因沒有明確顯示 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ 而失分。



考生表現 – 題 5

- 在 (a)，整體表現優良。
- 然而，部分考生沒有察覺可從表中直接找到答案，因而花時間求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 。少數考生錯誤混淆了「極大點」、「極小點」和「拐點」等術語。



考生表現 – 題 5 (續)

- 在 (b)，整體表現良好。然而，部分考生混淆了「水平」與「垂直」，並寫出「 $y = -3$ 是垂直漸近線」。
- 部分考生在得出正確數式 $f(x) = -3 + \frac{12}{x^2 + 3}$ 後，卻錯誤地指出「 $x = -\sqrt{3}$ 和 $x = \sqrt{3}$ 或 $x = \pm\sqrt{3}i$ 是垂直漸近線」等等。
- 在 (c)，整體表現令人滿意。雖然在每個拐點的一階導數都如已知的表所顯示為非零，但不少考生錯誤地把兩個拐點繪畫為平穩點。



考生表現 – 題 6

- 在 (a)，整體表現優良。考生普遍的錯誤是面積 $= \int_0^4 \left[\left(\frac{-x^2}{2} + 2x + 4 \right) - 4 \right] dx + \int_4^5 \left[5 - \left(\frac{-x^2}{2} + 2x + 4 \right) \right] dx$ 。
- 在 (b)，整體表現尚可，百分之四十考生在這部分取得零分，頗多考生錯誤運用外殼法計算體積。



考生表現 – 題 9

- 在 (a)，整體表現令人滿意。
- 大部分考生利用高斯消去法或考慮係數矩陣的行列式來開始作業。
- 利用高斯消去法的考生之中，部分考生得出 $(ab - b)z = (a + 2)$ ，但未能推論 $ab - b$ 和 $a + 2$ 兩者均為零。
- 在考慮係數矩陣的行列式的考生之中，部分只設 $\Delta = 0$ ，但沒有留意 $\Delta_z = 0$ 。
- 在 (b)，整體表現尚可。在 (a) 部分取得滿分的考生中，大多數在這部分都取得滿分。



考生表現 – 題 10

- 在 (a)，整體表現優良。少數考生因為錯誤背記截點公式而失分。
- 在 (b)，整體表現欠佳。部分考生在邏輯推理方面出錯。他們以為若 A 、 N 、 P 、 M 是共圓點時， AP 一定是直徑，因而指出 $\angle ANP = \angle AMP = 90^\circ$ 。
- 另一個常見的錯誤是點積公式中錯誤的向量方向，例如 $\cos \angle OAB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{AB}}{|\vec{OA}| |\vec{AB}|}$ 。



考生表現 – 題 13

- 在 (a)(i)，整體表現令人滿意。部分考生混淆了跡與轉置。部分考生正確地計算 MN 和 NM ，但沒有求 $\text{tr}(MN)$ 和 $\text{tr}(NM)$ 。
◦ 其他錯誤包括 $\text{tr}(MN) = \text{tr}(M) \text{tr}(N)$ 。
- 在 (a)(ii)，考生表現差劣。很多考生作出如 $\text{tr}(BAB^{-1}) = \text{tr}(BB^{-1}A)$ 般的錯誤。部分考生錯誤地利用(a)(i)來指出

$$A = AB^{-1}B = BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}。$$



考生表現 – 題 13 (續)

- 在 (a)(iii)，考生表現差劣。
很多考生在 (a)(ii) 錯誤指出 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，
沒有列出步驟便寫下答案。
- 部分考生寫出 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 4$ 。部分考生指出 $|A| = \text{tr}(A)$ 。
- 部分考生只背記以往試卷的解法，然後寫出如
 $(BAB^{-1})^n = BA^n B^{-1}$ 等的東西，並用來推論 $|A| = 3$ 。
- 頗多考生累贅地展開 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 來解答 (a)(ii)
和 (iii) 部分，少部分考生最後都得出正確答案。



考生表現 – 題 13 (續)

- 在 (b)(i)，考生表現差劣。

很多考生錯誤地從 $\begin{pmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 推論出 $\begin{pmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_1 \end{pmatrix} = 0$ ，因而 $p = \lambda_1, q = r = 0$ 及 $s = \lambda_1$ 。

- 部分考生寫出錯誤的東西，例如 $\begin{vmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = 0$ 。

- 在 (b)(ii)，考生表現差劣。很多考生未能證明有關的結果，因為在之前的部分出錯，例如利用 $\lambda_1 = \lambda_2$ 或 $p = \lambda_1, q = r = 0, s = \lambda_1$ 等等。部分考生嘗試考慮根的和與積來證明結果，但大部分考生都不能完成



考生表現 – 題 13 (續)

- 在 (c)，考生表現差劣。
- 超過百分之九十考生在這部分取不到分數。
- 有些在較前部分犯了錯誤的考生宣稱 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，然後推論 $\lambda = 1$ 或 3 。



答卷示例

http://www.hkeaa.edu.hk/tc/hkdse/hkdse_subj.html?A1&1&4

The screenshot shows the HKEAA website interface. At the top, there is a navigation bar with links for 'English', '純文字版本', '聯絡我們', '常見問題', '網頁指南', 'RSS', and '搜尋'. Below this is a search box with a 'GO' button. The main navigation bar includes '主頁', '本局簡介', '資源', '網上服務', '新聞專區', '職位空缺', and '投標'. The current page is '主頁 > 香港中學文憑'. The main content area features a banner for '香港中學文憑' (HKDSE) with the text '甲類 - 新高中核心科目: 數學'. Below the banner is a list of resources, with '考生表現示例' (Candidate Performance Examples) circled in red. The right sidebar contains a '關注焦點' (Focus) section with links for '香港中學文憑', '新高中課程及評核檢討', '國際認可', and '香港中學文憑5**級獲英國大學及院校招生事務處確認對照分數'. Below this is a '香港中學文憑' section with a link for '2013香港中學文憑考試手機應用程式'. At the bottom of the sidebar, there is a list of links including '香港中學文憑簡介', '重要日期', '考試時間表', '考試報名', '考試費用', '考生手冊', '考試規則', and '報告考試異常情況'.

香港考試及評核局
Hong Kong Examinations and Assessment Authority

English | 純文字版本 | 聯絡我們 | 常見問題 | 網頁指南 | RSS | 搜尋

主頁 | 本局簡介 | 資源 | 網上服務 | 新聞專區 | 職位空缺 | 投標

主頁 > 香港中學文憑

考生 | 家長 | 學校及教師 | 考務人員 | 合作夥伴

列印 電郵給朋友

關注焦點

香港中學文憑

新高中課程及評核檢討

國際認可

香港中學文憑5**級獲英國大學及院校招生事務處確認對照分數

香港中學文憑

2013香港中學文憑考試手機應用程式

香港中學文憑簡介

重要日期

考試時間表

考試報名

考試費用

考生手冊

考試規則

報告考試異常情況

甲類 - 新高中核心科目: 數學

- 評核大綱
- 課程及評估指引
- 考生表現示例
- 練習卷
- 樣本試卷
- 等級描述
- 其他資源
- 常見問題



一般建議

考生應注意下列各點：

- 考生列出得出答案的必要步驟，例如在第 1 題清楚顯示 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ 。
- 考生應熟識求漸近線的方法，及題目要求的表達。



一般建議

- 考生在嘗試答題前應小心閱讀並理解題目。例如在第 5 題，由於已知的符號表提供了足夠的資料以確定 (a) 部分題目要求的點的 x 值，因此即使有關的函數已被明確列出，考生卻無需求函數的導數。
- 至於很多題目要求考生使用較前部分得出的結果，考生應掌握相關數式之間的連繫，然後寫出適當的步驟，否則，對於一些不容許另一種方法的題目而言，考生會被扣分。



一般建議

- 在微積分方面，考生對基本概念、公式和作業等應有良好的掌握，例如
 1. 明白負的變率顯示相對於時間的數量減少；
 2. 在 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ 中不要遺漏絕對值符號；
 3. 在使用代換的定積分變換上、下限。



一般建議

- 在向量方面，考生應
 1. 留意 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ 並不蘊涵 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ；
 2. 必須顯示兩個向量互相垂直，才可使它們的點積等於零；
 3. 明白向量式的幾何解釋，尤其是關於叉積的幾何解釋。



一般建議

- 在矩陣方面，考生應留意矩陣乘法是不可交換的。他們在矩陣的基本運算方面應更為小心。
- 考生應留意如非題目另有說明，否則他們求得數字的值須為真確值，即使在中間的步驟亦如是。



謝謝!



香港考試及評核局
Hong Kong
Examinations and
Assessment Authority