

目 錄

第二級

示例一

示例二

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 2 4 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

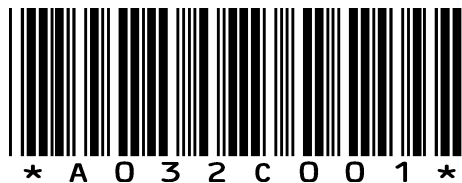
本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

- (一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。
- (二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。
- (三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
- (四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。
- (五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
- (六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
- (七) 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
- (八) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

甲部 (50 分)

1. 設 O 、 A 及 B 為直角坐標平面上的三相異點使得 $|\vec{OB}| = |\vec{OA}| + |\vec{AB}|$ ，其中 O 為原點。
- (a) 描述 O 、 A 與 B 之間的幾何關係。
- (b) 假定 $\vec{OA} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ 及 $|\vec{OB}| = 20$ 。求 $\vec{AB}$ 。

(3 分)

(a) O 、 A 、 B 之間是直角三角形

$$\begin{aligned}
 (b) \quad |\vec{OB}| &= |\vec{OA}| + |\vec{AB}| \\
 20 &= \sqrt{3^2 + 4^2} + |\vec{AB}| \\
 |\vec{AB}| &= 15 \\
 \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\
 &= \sqrt{20^2 - (3^2 + 4^2)} \\
 &= \sqrt{375}
 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 設 $x > 0$ 。

(a) 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ 。

(b) 從基本原理求 $\frac{d}{dx} e^{\sqrt{x}}$ 。

(5 分)

$$\begin{aligned} (a) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{x+h-x}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad & \frac{d}{dx} e^{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) (e^{\sqrt{x}}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} (e^{\sqrt{x}}) \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}}{2x} \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 設 m 為一正整數。考慮 $\left(x^m - \frac{2}{x}\right)^{24}$ 依 x 的降冪次序的展開式。

(a) 求該展開式的首 3 項。

(b) 若該展開式的第 19 項為一常數，求 m 及該展開式中 x^{60} 的係數。

(5 分)

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \left(x^m - \frac{2}{x}\right)^{24} \\
 &= x^{24m} + \binom{24}{1} (x^{24m-1}) \left(-\frac{2}{x}\right) + \binom{24}{2} (x^{24m-2}) \left(-\frac{2}{x}\right)^2 + \binom{24}{3} (x^{24m-3}) \left(-\frac{2}{x}\right)^3 \\
 &= x^{24m} + (-2n)(x^{24m-1})x + \frac{(x^{24m-2})n(n-1)(4)}{2} + \frac{(-8)(x^{24m-3})n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{2^{24}}{x^{24}}
 \end{aligned}$$

第一項是 x^{24m}

第二項是 $-2nx^{24m-1}x$

第三項是 $\frac{-4(x^{24m-2})n(n-1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2}x^2 = \frac{-2(x^{24m-2})n(n-1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)x^2}{2}$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & \binom{24}{19} (x^{24m-19}) \left(-\frac{2}{x}\right)^{19} \\
 &= \frac{-2^{19} (x^{24m-19})}{x^{19} (1.216451004 \times 10^{17})}
 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. (a) 設 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 。證明 $\csc 2x - \cot 2x = \tan x$ 。

(b) 解方程 $(\csc 3\theta - \cot 3\theta)(\csc \theta - \cot \theta) = 1$ ，其中 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ 。

(5分)

$$(a) \quad \csc 2x - \cot 2x$$
$$= \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\tan 2x}$$

$$= \frac{1}{\sin 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \tan x$$

$$\therefore \csc 2x - \cot 2x = \tan x$$

$$(b) (\csc 3\theta - \cot 3\theta)(\csc \theta - \cot \theta) = 1$$

$$\tan^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 設 k 為一常數。

利用分部積分法，證明 $\int \cos(k \ln x) dx = \frac{x}{1+k^2} (\cos(k \ln x) + k \sin(k \ln x)) + \text{常數}$ 。

- (b) 利用 (a)，或其他方法，計算 $\int_1^e \sin^2(\pi \ln x) dx$ 。

(6 分)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int \cos(k \ln x) dx \\ &= x \cos(k \ln x) - \int x (-\sin x) \left(\frac{k}{x} + \ln x \right) dx \\ &= x \cos(k \ln x) - \int x (-\sin x k - \sin x \ln x) dx \\ &= x \cos(k \ln x) - \frac{1}{2} \int (-\sin x k - \sin x \ln x) d(x^2) \\ &= x \cos(k \ln x) + \frac{1}{2} \int x^2 (\sin x k + \cos x \ln x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \int_1^e \sin^2(\pi \ln x) dx \quad \text{Let } u = k \ln x \\ &= \int_1^e \frac{x}{1+k^2} (\cos(k \ln x) + k \sin(k \ln x)) dx \quad \text{當 } x=e, \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} 3x + y - 9z = 0 \\ 2x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

(a) 解 (E)。

(b) 某人宣稱 (E) 有唯一解 (x, y, z) 滿足 $\sin x + \cos y - \cos z = 0$ ，其中 $0 < z < \frac{\pi}{2}$ 。你是否同意？解釋你的答案。

(6分)

$$(a) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \quad 3R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

設 $y = t$ ；其中 t 為任意實數

$$y - 3z = 0$$

$$t = 3z$$

$$z = \frac{t}{3}$$

$$3x + y - 9z = 0$$

$$3x + t - 9\left(\frac{t}{3}\right) = 0$$

$$3x + t - 3t = 0$$

$$x = \frac{2t}{3}$$

$$\therefore (x, y, z) = \left(\frac{2t}{3}, t, \frac{t}{3} \right)$$

(b) 把 $(x, y, z) = \left(\frac{2t}{3}, t, \frac{t}{3} \right)$ 代入 $\sin x + \cos y - \cos z = 0$

$$\sin \frac{2t}{3} + \cos t - \cos \frac{t}{3}$$

$$= 2\sin \frac{t}{3} \cos \frac{t}{3} + (-2\sin \frac{t+\frac{t}{3}}{2} \sin \frac{t-\frac{t}{3}}{2})$$

$$= 2\sin \frac{t}{3} \cos \frac{t}{3} - 2\sin \frac{2t}{3} \sin \frac{t}{3}$$

$$\neq 0$$

$\therefore$ 不同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 設 C 為曲線 $x^2y + 2xy^2 + 8 = 0$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ ，答案以 x 及 y 表示。

(b) 某人宣稱有兩條 C 的切線平行於直線 $x + 2y + 1 = 0$ 。你是否同意？解釋你的答案。

(6分)

(a) $x^2y + 2xy^2 + 8 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \frac{dy}{dx} + 2 \cdot 2y \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} (2x + 4y)$$
$$2x + 4y - 1 = 0$$

(b) 直線 $x + 2y + 1 = 0$ 的斜率 $= -\frac{1}{2}$
 C 的斜率 $= -\frac{1}{2}$
 $\therefore$ 直線 $x + 2y + 1 = 0$ 的斜率 $= C$ 的斜率
 $\therefore$ 同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ， $\sum_{r=1}^n r(2^{-r}) = 2 - (n+2)(2^{-n})$ 。

(b) 計算

(i) $\sum_{r=1}^{1999} r(2^{-r})$ ，

(ii) $\sum_{r=1}^{1000} (2000-r)2^r$ 。

(7分)

(a) 設 $P(n)$ 為命題 $\left[\sum_{r=1}^n r(2^{-r}) = 2 - (n+2)(2^{-n}) \right]$

當 $n=1$ ，左方 = $\sum_{r=1}^1 (1)(2^{-1}) = \frac{1}{2}$

右方 = $2 - (1+2)(2^{-1}) = \frac{1}{2}$

$\therefore$ 左方 = 右方

$\therefore P(1)$ 成立

假設對於某正整數 m ， $P(m)$ 成立

ie. $\sum_{r=1}^m r(2^{-r}) = 2 - (m+2)(2^{-m})$

當 $n = m+1$ ，左方 = $\sum_{r=1}^{m+1} r(2^{-r})$

$= \sum_{r=1}^m r(2^{-r}) + (m+1)(2^{-(m+1)})$

$= 2 - (m+2)(2^{-m}) + (m+1)(2^{-(m+1)})$

$= 2 - (2^{-m}) \left(m+2 + (m+1)\left(\frac{1}{2}\right) \right)$

$= 2 - (2^{-m}) \left(m+2 + \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \right)$

$= 2 - \left(\frac{3m+5}{2} \right) (2^{-m})$

= 右方

$\therefore P(m+1)$ 成立

$\therefore$ 根據數學歸納法原理，對於所有正整數 n ， $P(n)$ 成立

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$(b)(i) \sum_{r=1000}^{1999} r(2^{-r})$$

$$= \sum_{r=1}^{1999} r(2^{-r}) - \sum_{r=1}^{999} r(2^{-r})$$

$$= \left[2 - (1999+2)(2^{-1999}) \right] - \left[2 - (999+2)(2^{-999}) \right]$$

$$= \left(2 - \frac{2001}{2^{1999}} \right) - \left(2 - \frac{1001}{2^{999}} \right)$$

$$= -\frac{2001}{2^{1999}} + \frac{1001}{2^{999}}$$

$$= \frac{1001 \times 2^{999} - 2001 \times 2^{999}}{2^{1998}}$$

$$= \frac{2^{999} (1001 \times 2^{1000} - 2001)}{2^{1998}}$$

$$= \frac{1001 \times 2^{1000} - 2001}{2^{999}}$$

$$(b)(ii) \sum_{r=1}^{1000} (2000-r)2^r$$

$$= \sum_{r=1}^{1000} (2000-r)2^r - \sum_{r=1}^0 (2000-r)2^r$$

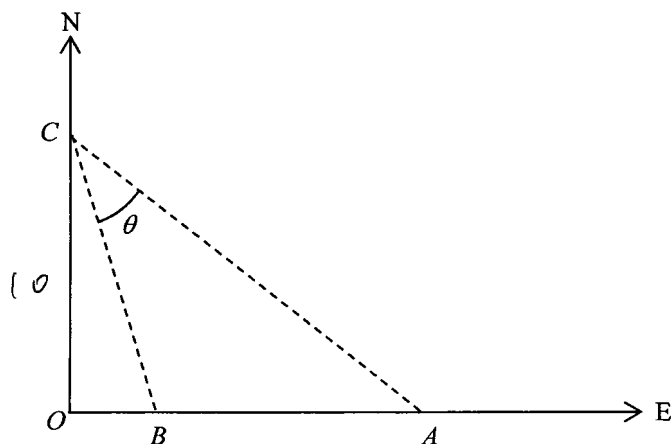
$$= \left[2 - (1000+2)(2^{-1000}) \right] - \left[2 - (0+2)(2^{-0}) \right]$$

$$= \frac{1002}{2^{1000}} + 2$$

$$= \frac{1002 + 2 \times 2^{1000}}{2^{1000}}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 兩玩具車 A 及 B 分別以恆速率每秒 4 米及每秒 1 米沿直線向東前進。它們同時從 O 點出發。定點 C 位於 O 以北 10 米。下圖顯示於 t 秒後 A 及 B 的位置。設 $\angle ACB = \theta$ 弧度。



- (a) 證明 $\tan \theta = \frac{15t}{2(t^2 + 25)}$ 。
- (b) 已知當 $t = T$ 時， $\angle BAC = \angle ACB$ 。求
- T ，
 - 當 $t = T$ 時 θ 的變率。

(7分)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \tan \theta &= \frac{AO}{CO} \\
 &= \frac{(10 + 4 + 1)t}{2(t^2 + 25)} \\
 &= \frac{15t}{2(t^2 + 25)}
 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50 分)

10. 對所有 $x \in \mathbf{R}$ ，定義 $f(x) = \frac{2(x+2)^2}{2x^2+6x+5}$ 。將 $y=f(x)$ 的圖像記為 G 。

(a) 求 G 的漸近線。 (2 分)

(b) 求 $f'(x)$ 。 (2 分)

(c) 求 G 的極大點及極小點。 (3 分)

(d) 描繪 G 。 (3 分)

(e) 求 G 、 x 軸與 y 軸圍成的區域的面積。 (3 分)

$$\begin{aligned} (a) \quad f(x) &= \frac{2x^2+8x+8}{2x^2+6x+5} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+8x+8}{2x^2+6x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} + \frac{8}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} \\ &= \frac{1+0+0}{1+0+0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ 水平漸近線是 $y=1$

$$\begin{aligned} (b) \quad f'(x) &= \frac{(2x^2+6x+5)(4x+8) - (2x^2+8x+8)(4x+6)}{(2x^2+6x+5)^2} \\ &= \frac{8x^3+16x^2+24x^2+48x+20x+40 - (8x^3+12x^2+32x^2+48x+32x+48)}{(2x^2+6x+5)^2} \\ &= \frac{-4x^2-12x-8}{(2x^2+6x+5)^2} = \frac{-4(x^2+3x+2)}{(2x^2+6x+5)^2} \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(c) 當 $f'(x) = 0$

$$\frac{-4(x^2+3x+2)}{(2x^2+6x+5)^2} = 0$$

$$-4(x^2+3x+2) = 0$$

$$x = -1 \text{ 或 } x = -2$$

$$\therefore f(-1) = 2$$

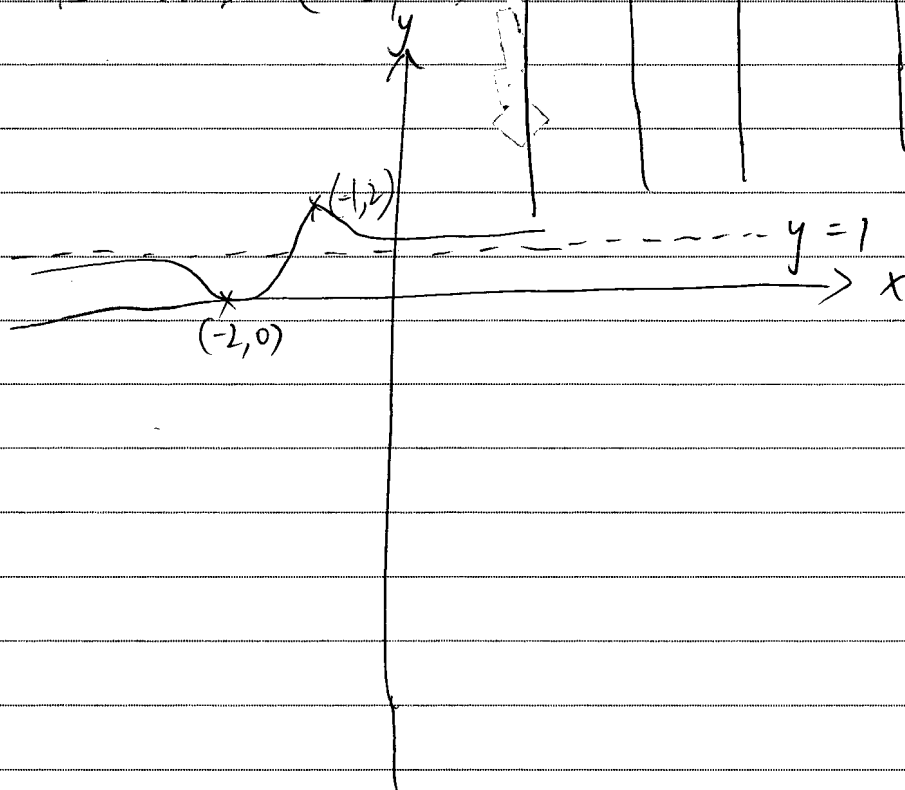
$$f(-2) = 0$$

$\therefore$ 極大點是 $(-1, 2)$

極小點是 $(-2, 0)$

$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
$f'(x) \rightarrow$	0	-	0	-

(d)



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 設 a 為一非零的常數。利用代換積分法，以 a 表 $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ 。 (3分)

(b) 設 $g(x)$ 及 $h(x)$ 均為定義在 $\mathbf{R}$ 上的連續函數。已知 $g(x)$ 為一偶函數及 $h(x)$ 為一奇函數。證明 $\int_{-c}^c \frac{g(x)}{1 + e^{h(x)}} dx = \int_0^c g(x) dx$ ，其中 c 為一常數。 (4分)

(c) 計算 $\int_{-1}^1 \frac{3^x + 3^{-x}}{(1 + e^{\sin^3 x})(9^x + 9^{-x} + 7)} dx$ 。 (5分)

(a) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ Let $x = a \tan \theta$
 $dx = a \sec^2 \theta d\theta$

$= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^2 \tan^2 \theta}$

$= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^2 (\sec^2 \theta - 1)}$

$= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a \sec^2 \theta - a^2}$

$= \int d\theta - \int \frac{1}{a} d\theta$

$= \theta - \ln|a^2| + C$

$= \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \ln|a^2| + C$

(b) $\int_{-c}^c \frac{g(x)}{1 + e^{h(x)}} dx$ Let $u = 1 + e^{h(x)}$, $du = h(x)e^{h(x)} dx$
 當 $x = c$, $u = 1 + e^{h(c)}$
 $x = -c$, $u = 1 + e^{h(-c)}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$(c) \int_{-1}^1 \frac{3^x + 3^{-x}}{(1 + e^{\sin^3 x})(9^x + 9^{-x} + 7)} dx$$

$$\text{Let } u = \sin^3 x$$

$$du = 3\cos^2 x dx$$

$$\text{當 } x = 1, u = 1$$

$$x = -1, u = -1$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{3^{\sin^3(\frac{u}{x})} + 3^{-\sin^3(\frac{u}{x})}}{(1 + e^u)(9^{\sin^3(\frac{u}{x})} + 9^{-\sin^3(\frac{u}{x})} + 7)} du$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. (a) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} 2x & + z = -2 \\ -(2\lambda+5)x + \lambda y & = -1 \\ (\lambda+2)x + y - z & = 0 \end{cases}, \text{ 其中 } \lambda \in \mathbb{R}.$$

假設 (E) 有唯一解。

(i) 求 λ 值的範圍。

(ii) 解 (E) 。

(6分)

(b) 對任意 $h > 0$ ，設 $\mathbf{u} = h\mathbf{i} + (2h+5)\mathbf{j} - 2h\mathbf{k}$ 。假定向量 $\mathbf{v}$ 垂直於 $(h+2)\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ 且 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mu\mathbf{i} + 2h\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ，其中 μ 為一實數。

(i) 以 h 表 $\mathbf{v}$ 及 μ 。

(ii) 是否存在一 h 的值使得以 $\mathbf{u}$ 及 $\mathbf{v}$ 為鄰邊的平行四邊形的面積為 9？解釋你的答案。

(7分)

(a)(i) $\because (E)$ 有唯一解

$$\therefore \Delta \neq 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -(2\lambda+5) & \lambda & 0 \\ \lambda+2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$-2\lambda + (-2\lambda-5) - (\lambda^2 + 2\lambda) \neq 0$$

$$-2\lambda - 2\lambda - 5 - \lambda^2 - 2\lambda \neq 0$$

$$-\lambda^2 - 6\lambda - 5 \neq 0$$

$$\lambda \neq -5 \text{ 及 } \lambda \neq -1$$

$$\therefore \lambda < -5 \text{ 或 } \lambda > -5, \lambda < -1 \text{ 或 } \lambda > -1$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(a)(ii)

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\lambda - 1 + 2$$

$$= 2\lambda + 1$$

$$\therefore x = \frac{2\lambda + 1}{-\lambda^2 - 6\lambda - 5}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2\lambda - 5 & -1 & 0 \\ \lambda + 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-(-\lambda - 2)) - (2)(-2\lambda - 5)$$

$$= 2 + \lambda + 2 + 4\lambda + 10$$

$$= 5\lambda + 14$$

$$\therefore y = \frac{5\lambda + 14}{-\lambda^2 - 6\lambda - 5}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2\lambda - 5 & \lambda & -1 \\ \lambda + 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-2\lambda - 5) - (-2\lambda)(\lambda + 2) - (-2)$$

$$= 4\lambda + 10 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$$

$$= 2\lambda^2 + 8\lambda + 12$$

$$z = \frac{2\lambda^2 + 8\lambda + 12}{-\lambda^2 - 6\lambda - 5}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12(b)(i)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. 設 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 及 $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 。

(a) 計算 $A - 6A^{-1}$ 及 ABA^{-1} 。(4分)

(b) 求 B^n ，其中 n 為一正整數。(3分)

(c) 是否存在一正整數 k 使得 $A^{2k}B^{2k}(A^{-1})^{2k} = (ABA^{-1})^{2k}$ ？解釋你的答案。(3分)

(d) 計算 $A^{999}B^{999}(A^{-1})^{999}$ 。(2分)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A^{-1} &= \frac{1}{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - 6A^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\begin{aligned}
 ABA^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

$$(b) B^1 = \begin{pmatrix} 4^1 & 2^1 \\ 1^1 & 5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4^2 & 2^2 \\ 1^2 & 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 4^3 & 2^3 \\ 1^3 & 5^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 8 \\ 1 & 125 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 2^n \\ 1^n & 5^n \end{pmatrix}$$

$$(c) A^{2k} B^{2k} (A^{-1})^{2k} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-2k}$$

$$\text{當 } k=1, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{2(1)} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{2(1)} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-2(1)}$$

$$= (ABA^{-1})^{2k}$$

$\therefore$ 存在一正整數 k

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

- 試卷完 -

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 2 4 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

- (一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。
- (二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。
- (三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
- (四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。
- (五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
- (六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
- (七) 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
- (八) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

甲部 (50 分)

1. 設 O 、 A 及 B 為直角坐標平面上的三相異點使得 $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{AB}|$ ，其中 O 為原點。

(a) 描述 O 、 A 與 B 之間的幾何關係。

(b) 假定 $\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ 及 $|\overrightarrow{OB}| = 20$ 。求 $\overrightarrow{AB}$ 。

(3 分)

a. O, A, B 三點相連為一個三角形

$$a. \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$20 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \overrightarrow{AB}$$

$$20 = \sqrt{3^2 + 4^2} + |\overrightarrow{AB}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 15$$

$$\overrightarrow{AB} = 225$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 設 $x > 0$ 。

(a) 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ 。

(b) 從基本原理求 $\frac{d}{dx} e^{\sqrt{x}}$ 。

(5 分)

$$a. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b. 設 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x+h}} - e^{\sqrt{x}}}{h}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{h}} - 1}{h}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 設 m 為一正整數。考慮 $\left(x^m - \frac{2}{x}\right)^{24}$ 依 x 的降冪次序的展開式。

(a) 求該展開式的首 3 項。

(b) 若該展開式的第 19 項為一常數，求 m 及該展開式中 x^{60} 的係數。

(5 分)

$$a. \left(x^m - \frac{2}{x}\right)^{24}$$

$$= (x^m)^{24} + 24(x^m)^{23}\left(-\frac{2}{x}\right) + 276(x^m)^{22}\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + \dots$$

$$b. \text{項} 19 = C_{18}^{24} (x^m)^6 \left(-\frac{2}{x}\right)^{18}$$

$$\because C_{18}^{24} (x^m)^6 \left(-\frac{2}{x}\right)^{18} \text{ 是常數}$$

$$\therefore C_{18}^{24} x^{6m} \left(\frac{(-2)^{18}}{x^{18}}\right)$$

$$6m = 18$$

$$m = 3$$

$$\text{項} 4 = C_3^{24} (x^3)^{21} \left(-\frac{2}{x}\right)^3$$

$$x^{60} \text{ 項係數} = C_3^{24} (-2)^3$$

$$= -16192$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. (a) 設 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 。證明 $\csc 2x - \cot 2x = \tan x$ 。

(b) 解方程 $(\csc 3\theta - \cot 3\theta)(\csc \theta - \cot \theta) = 1$ ，其中 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ 。

(5 分)

a. $\csc 2x - \cot 2x$

$$= \frac{1}{\sin 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \tan x$$

b. $(\csc 3\theta - \cot 3\theta)(\csc \theta - \cot \theta) = 1$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 設 k 為一常數。

利用分部積分法，證明 $\int \cos(k \ln x) dx = \frac{x}{1+k^2} (\cos(k \ln x) + k \sin(k \ln x)) + \text{常數}$ 。

- (b) 利用 (a)，或其他方法，計算 $\int_1^e \sin^2(\pi \ln x) dx$ 。

(6 分)

$$\begin{aligned} a. \quad & \int \cos(K \ln x) dx \\ &= \int \cos(K \ln x) \cdot \frac{1}{\cos(K \ln x)} \cdot \frac{k}{x} d(\sin(K \ln x)) \\ &= K \left[\frac{1}{x} \sin(K \ln x) - \int \sin(K \ln x) d\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= K \left[\frac{1}{x} \sin(K \ln x) - \int \sin(K \ln x) \ln x dx \right] \\ &= K \left[\frac{1}{x} \sin(K \ln x) - \int \sin(K \ln x) \ln x \cdot \frac{1}{\sin(K \ln x)} \cdot \frac{K}{x} d(\cos(K \ln x)) \right] \\ &= K \left[\frac{1}{x} \sin(K \ln x) + \frac{\ln x}{x} \cos(K \ln x) - \int \cos(K \ln x) d\left(\frac{K \ln x}{x}\right) \right] \\ &= K \left[\frac{1}{x} \sin(K \ln x) + \frac{\ln x}{x} \cos(K \ln x) - \frac{1}{x} \sin(K \ln x) \right] + C \\ &= \frac{x}{1+K^2} [\cos(K \ln x) + K \sin(K \ln x)] + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. \quad & \int_1^e \sin^2(\pi \ln x) dx \\ &= \int_1^e 1 - \cos^2(\pi \ln x) dx \\ &= \int_1^e \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} 3x + y - 9z = 0 \\ 2x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

(a) 解 (E)。

(b) 某人宣稱 (E) 有唯一解 (x, y, z) 滿足 $\sin x + \cos y - \cos z = 0$ ，其中 $0 < z < \frac{\pi}{2}$ 。你是否同意？解釋你的答案。

(6分)

a. (E):
$$\begin{cases} 3x + y - 9z = 0 \\ 2x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - \frac{2}{3}R_1 \rightarrow R_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{設 } z = t$$

$$\frac{1}{3}y - z = 0$$

$$y = 3t$$

$$3x + y + 9z = 0$$

$$3x = -12t$$

$$x = -4t$$

$$\therefore z = t; y = 3t; x = -4t$$

b. 當 $z = t, y = 3t, x = -4t$, (E) 有解

$$3(-4t) + 1(3t) - 9(t) = 0$$

$$\therefore t = 0$$

$$\text{當 } t = 0,$$

$$\sin x + \cos y - \cos z$$

$$= \sin 0 + \cos 0 - \cos 0$$

$$= 0$$

$$\text{當 } t = 1,$$

$$\sin 1 + \cos 1 - \cos 1$$

$$= -0.0710 \dots$$

$$\neq 0$$

$\therefore$ 同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 設 C 為曲線 $x^2y + 2xy^2 + 8 = 0$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ ，答案以 x 及 y 表示。

(b) 某人宣稱有兩條 C 的切線平行於直線 $x + 2y + 1 = 0$ 。你是否同意？解釋你的答案。

(6 分)

$$\frac{dy}{dx} 0 = x^2y + 2xy^2 + 8$$

$$0 = 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 2y^2 + 2x \frac{dy}{dx}$$

$$-x^2 \frac{dy}{dx} = 2xy + 2y^2 + 2x \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy + 2y^2 + 2x \frac{dy}{dx}}{-x^2}$$

"

b. $x + 2y + 1 = 0$

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{dx}{dy} = 0$$

$$2xy + 2y^2 + 2x \frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$ 同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ， $\sum_{r=1}^n r(2^{-r}) = 2 - (n+2)(2^{-n})$ 。

(b) 計算

(i) $\sum_{r=1000}^{1999} r(2^{-r})$ ，

(ii) $\sum_{r=1}^{1000} (2000-r)2^r$ 。

(7分)

a. 設 $P(n)$ 為 $\sum_{r=1}^n r(2^{-r}) = 2 - (n+2)(2^{-n})$

當 $n=1$ 時，

$$L.H.S. = (1)(2^{-1}) = \frac{1}{2}$$

$$R.H.S. = 2 - (3)(2^{-1}) = \frac{1}{2}$$

$$= L.H.S. \text{。}$$

$\therefore P(1)$ 成立

假設 $P(A)$ 對某些正整數 n 成立

即 $\sum_{r=1}^A r(2^{-r}) = 2 - (A+2)(2^{-A})$

當 $n=A+1$ 時，

$$L.H.S. = \sum_{r=1}^{A+1} r(2^{-r})$$

$$R.H.S. = 2 - (A+3)(2^{-A-1})$$

$$= \sum_{r=1}^A r(2^{-r}) + (A+1)(2^{-A-1})$$

$$= 2 - (A+2)(2^{-A}) + (A+1)(2^{-A-1})$$

$$= 2 - [(A+2)(2^{-A}) - (A+1)(2^{-A-1})]$$

$$= 2 - [(2^{-A-1})(A+2)(2) - (A+1)]$$

$$= 2 - [(2^{-A-1})(2A+4 - A-1)]$$

$$= 2 - (A+3)(2^{-A-1})$$

$$= R.H.S. \text{。}$$

$\therefore P(A+1)$ 成立

$\therefore$ 根據數學歸納法， $P(A)$ 對所有正整數 n 成立

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\begin{aligned} \text{bi. } & \sum_{r=1}^{1999} r(2^{-r}) \\ &= \sum_{r=1}^{1999} r(2^{-r}) - \sum_{r=1}^{999} r(2^{-r}) \\ &= 2 - (2001)(2^{-1999}) - [2 - (1001)(2^{-999})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bii. } & \sum_{r=1}^{1000} (2000-r)2^r = 1999 \times 2^1 + 1998 \times 2^2 + 1997 \times 2^3 + \dots + 1000 \times 2^{1000} \\ & \sum_{r=1000}^{1999} r(2^{-r}) = 1000(2^{-1000}) + 1001(2^{-1001}) + \dots + 1999(2^{-1999}) \end{aligned}$$

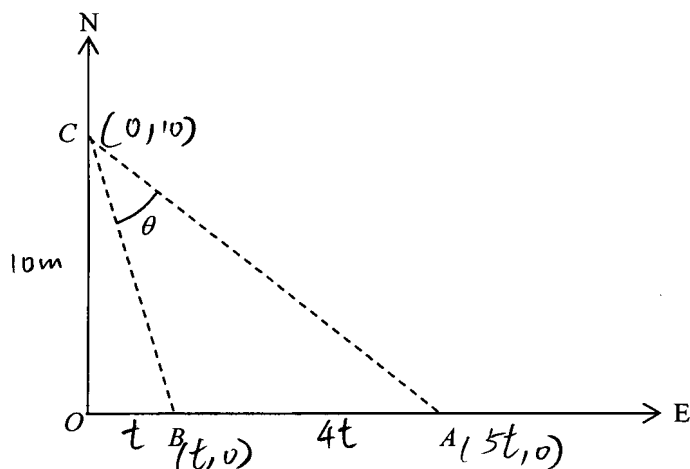
$$2^{2000} \left[\sum_{r=1000}^{1999} r(2^{-r}) \right] = 1000(2^{1000}) + 1001 \times 2^{999} + \dots + 1999 \times 2^1 = \sum_{r=1}^{1000} (2000-r)2^r$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{r=1}^{1000} (2000-r)2^r &= 2^{2000} [2 - (2001)(2^{-1999}) - 2 + (1001)(2^{-1001})] \\ &= -(2001)(2) + (1001)(2^{1001}) \\ &= (1001)(2^{1001}) - 4002 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 兩玩具車 A 及 B 分別以恆速率每秒 4 米及每秒 1 米沿直線向東前進。它們同時從 O 點出發。定點 C 位於 O 以北 10 米。下圖顯示於 t 秒後 A 及 B 的位置。設 $\angle ACB = \theta$ 弧度。



- (a) 證明 $\tan \theta = \frac{15t}{2(t^2 + 25)}$ 。
- (b) 已知當 $t = T$ 時， $\angle BAC = \angle ACB$ 。求
- T ，
 - 當 $t = T$ 時 θ 的變率。

(7 分)

$$a. \tan \angle OCB = \frac{t}{10}$$

$$\tan \angle OCB + \theta = \frac{5t}{10}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50 分)

10. 對所有 $x \in \mathbf{R}$ ，定義 $f(x) = \frac{2(x+2)^2}{2x^2+6x+5}$ 。將 $y=f(x)$ 的圖像記為 G 。

(a) 求 G 的漸近線。 (2 分)

(b) 求 $f'(x)$ 。 (2 分)

(c) 求 G 的極大點及極小點。 (3 分)

(d) 描繪 G 。 (3 分)

(e) 求 G 、 x 軸與 y 軸圍成的區域的面積。 (3 分)

a. $2x^2+6x+5=0$

$2(x^2+3x)+5=0$

$2x^2+6x+5 \sqrt{2x^2+8x+8}$

$2(x^2+3x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2)+5=0$

$\frac{2x^2+6x+5}{2x+3}$

$2(2x+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}=0$

水平漸近線: $y=1$

垂直漸近線: $x=\frac{8}{5}$

b. $f(x) = \frac{2(x+2)^2}{2x^2+6x+5}$

$f'(x) = \frac{4(x+2)(2x^2+6x+5) - (4x+6)2(x+2)^2}{(2x^2+6x+5)^2}$

$= \frac{(4x+8)(2x^2+6x+5) - (4x+6)(2x^2+8x+8)}{(2x^2+6x+5)^2}$

$= \frac{8x^3+24x^2+20x+16x^2+48x+40 - 8x^3-32x^2-32x-12x^2-48x-48}{(2x^2+6x+5)^2}$

$= \frac{-4x^2-12x-8}{(2x^2+6x+5)^2}$

c. $f(x)=0$

$x=-1$ 或 $x=-2$

$-4x^2-12x-8=0$

$x^2+3x+2=0$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

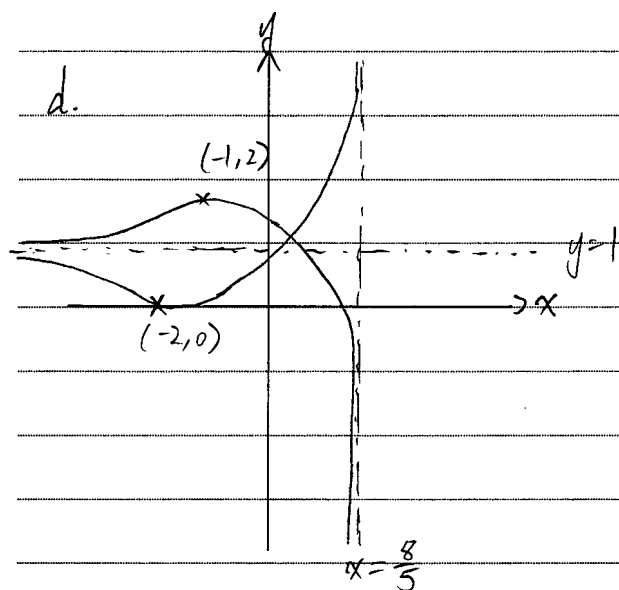
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
	\		/		\

$\therefore$ 極小點 $(-2, 0)$

極大點 $(-1, 2)$



e.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 設 a 為一非零的常數。利用代換積分法，以 a 表 $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ 。 (3分)

(b) 設 $g(x)$ 及 $h(x)$ 均為定義在 $\mathbf{R}$ 上的連續函數。已知 $g(x)$ 為一偶函數及 $h(x)$ 為一奇函數。證明 $\int_{-c}^c \frac{g(x)}{1 + e^{h(x)}} dx = \int_0^c g(x) dx$ ，其中 c 為一常數。 (4分)

(c) 計算 $\int_{-1}^1 \frac{3^x + 3^{-x}}{(1 + e^{\sin^3 x})(9^x + 9^{-x} + 7)} dx$ 。 (5分)

a. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$

Let $x = a \tan \theta$

$\frac{x}{a} = \tan \theta$

$\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$= \int \frac{1}{a^2 \tan^2 \theta + a^2} dx$

$= \int \frac{1}{a^2 (\sec^2 \theta)} \times a \sec^2 \theta d\theta$

$= \int \frac{1}{a} d\theta$

$= \frac{1}{a} [\theta] + C$

$= \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

b.

c. $\int_{-1}^1 \frac{3^x + 3^{-x}}{(1 + e^{\sin^3 x})(9^x + 9^{-x} + 7)} dx$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

[illegible]

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. (a) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} 2x & + z = -2 \\ -(2\lambda+5)x + \lambda y & = -1 \\ (\lambda+2)x + y - z & = 0 \end{cases}, \text{ 其中 } \lambda \in \mathbf{R}.$$

假設 (E) 有唯一解。

(i) 求 λ 值的範圍。

(ii) 解 (E) 。

(6分)

(b) 對任意 $h > 0$ ，設 $\mathbf{u} = h\mathbf{i} + (2h+5)\mathbf{j} - 2h\mathbf{k}$ 。假定向量 $\mathbf{v}$ 垂直於 $(h+2)\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ 且 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mu\mathbf{i} + 2h\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ，其中 μ 為一實數。

(i) 以 h 表 $\mathbf{v}$ 及 μ 。

(ii) 是否存在一 h 的值使得以 $\mathbf{u}$ 及 $\mathbf{v}$ 為鄰邊的平行四邊形的面積為 9？解釋你的答案。

(7分)

ai. $\Delta \neq 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -(2\lambda+5) & \lambda & 0 \\ (\lambda+2) & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-\lambda-0) + (-2\lambda-5-\lambda^2-2\lambda) \neq 0$$

$$-2\lambda - 2\lambda - 5 - \lambda^2 - 2\lambda \neq 0$$

$$-\lambda^2 - 6\lambda - 5 \neq 0$$

$$\lambda \neq -1, \text{ 或 } \lambda \neq -5,$$

$$\text{aii. } \Delta x = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(-\lambda) + (-1)$$

$$= 2\lambda - 1,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -(2\lambda+5) & -1 & 0 \\ (\lambda+2) & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2(2\lambda+5) + (\lambda+2)$$

$$= 5\lambda + 14,$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -(2\lambda+5) & \lambda & -1 \\ (\lambda+2) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2(-2\lambda-5-\lambda^2-2\lambda)$$

$$= 2 + 4\lambda + 10 + 2\lambda^2 + 4\lambda$$

$$= 2\lambda^2 + 8\lambda + 12,$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$x = \frac{Ax}{\Delta}$$

$$= \frac{2\lambda - 1}{- \lambda^2 - 6\lambda - 5}$$

$$= \frac{2\lambda - 1}{(2\lambda + 1)(2\lambda + 5)}, //$$

$$y = \frac{Ay}{\Delta}$$

$$= \frac{5\lambda + 14}{(2\lambda + 1)(2\lambda + 5)}, //$$

$$z = \frac{Az}{\Delta}$$

$$= \frac{2\lambda^2 + 8\lambda + 12}{(2\lambda + 1)(2\lambda + 5)}, //$$

$$= \frac{2(\lambda + 2)^2 + 4}{(2\lambda + 1)(2\lambda + 5)}, //$$

bi.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. 設 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 及 $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 。

- (a) 計算 $A - 6A^{-1}$ 及 ABA^{-1} 。(4 分)
- (b) 求 B^n ，其中 n 為一正整數。(3 分)
- (c) 是否存在一正整數 k 使得 $A^{2k}B^{2k}(A^{-1})^{2k} = (ABA^{-1})^{2k}$ ？解釋你的答案。(3 分)
- (d) 計算 $A^{999}B^{999}(A^{-1})^{999}$ 。(2 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。