

目 錄

第五級

示例一

示例二

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 2 4 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

數學 延伸部分
單元一（微積分與統計）
試題答題簿

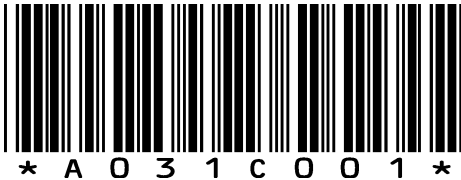
本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
(上午八時三十分至上午十一時)

考生須知

- (一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9 及 11 頁之適當位置貼上電腦條碼。
- (二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。
- (三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
- (四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。
- (五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
- (六) 除特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。
- (七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



甲部 (50 分)

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 a 及 b 均為常數使得 $6 < b < 15$ 。

x	0	3	6	b	15
$P(X=x)$	0.3	a	0.1	0.2	0.2

已知 $\text{Var}(5X) = 739$ 。

- (a) 求 a 及 b 。
- (b) 設 C 為事件 $0 < X \leq 7$ 。
- (i) 設 D 為事件 $4 < X \leq 15$ 。 C 與 D 是否獨立？解釋你的答案。
- (ii) 設 E 為一事件使得 $P(E) \neq 0$ 。若 C 與 E 互斥，寫出 $P(E)$ 的最大可取值。

(7 分)

$$0.3 + a + 0.1 + 0.2 + 0.2 = 1$$

$$a = 0.2$$

$$E(X) = 0 + 3(0.2) + 6(0.1) + 0.2b + 15(0.2)$$

$$= 4.2 + 0.2b$$

$$E(X^2) = 0 + 3^2(0.2) + 6^2(0.1) + 0.2b^2 + 15^2(0.2)$$

$$= 50.4 + 0.2b^2$$

$$\text{Var}(5X) = 739$$

$$25[E(X^2) - (E(X))^2] = 739$$

$$50.4 + 0.2b^2 - (4.2 + 0.2b)^2 = 29.56$$

$$0.2b^2 + 20.84 - 17.64 - 1.68b - 0.04b^2 = 0$$

$$0.16b^2 - 1.68b + 3.2 = 0$$

$$b = 8 \text{ 或 } b = 2.5 \text{ (捨去)}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$4 < X \leq 7$$

$$b) (i) \quad p(C) = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$p(D) = 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.5$$

$$p(C \cap D) = 0.1$$

$$p(C) \times p(D) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$$

$$\neq 0.1$$

$$\neq p(C \cap D)$$

$\therefore C$ 与 D 不是独立

$$(ii) \quad C \text{ 与 } E \text{ 独立} \text{ 代表 } p(C \cap E) = p(C) \times p(E)$$

$$= 0.3 + p(E)$$

$$\therefore p(E) \neq 0$$

$$\therefore p(E) \text{ 可以大于 } 0$$

$$\text{考虑 } 0.3 + p(E) \leq 1$$

$$p(E) \leq 0.7$$

$$p(0 < X \leq 15) = 0.7$$

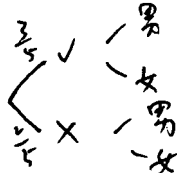
$$\therefore p(0 < X \leq 15) \text{ 满足 } p(E) \leq 0.7$$

$$\therefore p(E) \text{ 的最大可能值} = 0.7$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



$$\frac{2}{5}p =$$

2. 在一樂團中 $\frac{3}{5}$ 的成員佩戴眼鏡。在男成員當中，有 $\frac{4}{9}$ 佩戴眼鏡。隨機選出的一名成員是沒有佩戴眼鏡的女性的概率為 $\frac{3}{20}$ 。

(a) 已知隨機選出的一名成員沒有佩戴眼鏡，求該成員是女性的概率。

(b) 求隨機選出的一名成員是佩戴眼鏡的女性的概率。

(6 分)

a) 設沒有佩戴眼鏡的人中，女性的概率為 p

$$\frac{2}{5}p = \frac{3}{20} \quad \text{是}$$

$$p = \frac{3}{8}$$

∴ 所求概率為 $\frac{3}{8}$

b) 設佩戴眼鏡的人中，是男性的概率為 q

$$\frac{\frac{3}{5}q}{\frac{3}{5}q + \frac{2}{5}(1-\frac{3}{8})} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{3}{5}q = \frac{4}{15}q + \frac{1}{9}$$

$$q = \frac{1}{3}$$

所求概率：

$$(\frac{3}{5})(1-\frac{1}{3})$$

$$= \frac{2}{5}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 投擲一枚硬幣，擲得字的概率為 p ，其中 $0 < p < 1$ 。當投擲該硬幣 20 次時，擲得 1 次字的概率與擲得 3 次字的概率之比為 49:57。

(a) 求 p 。

(b) 投擲該硬幣 k 次。求 k 的最小值使擲得至少 1 次字的概率大於 0.85。

(6 分)

$$a) \quad \frac{{}^{20}C_1 (p)(1-p)^{19}}{{}^{20}C_3 (p)^3 (1-p)^{17}} = \frac{49}{57}$$

$$\frac{(1-p)^2}{57(p)^2} = \frac{49}{57}$$

$$1 - 2p + p^2 = 49p^2$$

$$48p^2 + 2p - 1 = 0$$

$$p = 0.125 \text{ 或 } p = -\frac{1}{6} \text{ (捨去)}$$

$$b) \quad 1 - (1 - 0.125)^k > 0.85$$

$$0.875^k < 0.15$$

$$k > \frac{\log 0.15}{\log 0.875}$$

$$k > 14.2073$$

$\therefore k$ 的最小值為 15

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\sigma = \sim$$

4. 某校各學生每星期的溫習時間依循一平均值為 μ 小時的正態分佈。從該校隨機選取一個 81 名學生的樣本。這些學生每星期的溫習時間之平均值及標準差分別為 13 小時及 1.75 小時。

- (a) μ 的 $\beta\%$ 置信區間的寬度為 0.7。求 β 。
- (b) 已知該樣本中有 36 名男生，且這些男生每星期的溫習時間之平均值及標準差分別為 12.5 小時及 2 小時。求該樣本中女生每星期的溫習時間之標準差。

[提示：樣本標準差為 $\sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)}$ 。]

(6 分)

a) 設臨界值為 z

$$2 \times z \times \frac{1.75}{\sqrt{81}} = 0.7$$

$$z = 1.8$$

$$\beta = 0.4641 \times 2 \times 100 = 92.82$$

b) 女生溫習時間的平均值 = $\frac{81 \times 13 - 36 \times 12.5}{81 - 36} = 13.4$ 小時

~~樣本標準差 = $\sqrt{\frac{[1.75^2(81-1) + 81(13)^2] - [2^2(36-1) + 36(12.5)^2]}{81-36-1}} = (81-36)(13.4)^2$~~

樣本標準差 = $\sqrt{\frac{[1.75^2(80) + 81(13)^2] - [2^2(36-1) + 36(12.5)^2]}{81-36-1} - (81-36 \times 13.4)^2}$

$$\approx 1.4206 \text{ 小時}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} &= \frac{n!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \end{aligned}$$

$$\binom{m}{2} =$$

5. 設 n 為一正數。

(a) 依 x 的升幂次序展開 $\frac{2}{e^{nx}}$ 至含 x^3 的項為止。

(b) 考慮 $(1+4x)^m + \frac{2}{e^{nx}}$ 的展開式，其中 m 為一正整數。已知該展開式中 x 及 x^2 的係數分別為 24 及 980。求該展開式中 x^3 的係數。

(7分)

$$a) \frac{2}{e^{nx}} = 2e^{-nx}$$

$$= 2 \left[1 - nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \right]$$

$$= 2 - 2nx + n(n-1)x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^3 + \dots$$

$$b) (1+4x)^m + \frac{2}{e^{nx}}$$

$$= \left[1 + 4mx + \frac{m(m-1)}{2} (4x)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} (4x)^3 + \dots \right] + 2e^{-nx}$$

$$= \left[1 + 4mx + 8m(m-1)x^2 + \frac{32m(m-1)(m-2)}{3} x^3 + \dots \right] + \left[2 - 2nx + n(n-1)x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^3 + \dots \right]$$

$$4m - 2n = 24 \quad ; \quad 8m(m-1) + n(n-1) = 980$$

$$n = 2m - 12 \quad \text{--- (1)} \quad 8m^2 - 8m + n^2 - n = 980 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{代入 (2): } 8m^2 - 8m + (2m-12)^2 - 2m + 12 = 980$$

$$8m^2 - 8m + 4m^2 - 48m + 144 - 2m + 12 = 980$$

$$12m^2 - 58m - 824 = 0$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 設 $e^u = (x^2 + x + e)^{2x+1}$ 。

(i) 將 u 表為 $p(x)\ln(q(x))$ 的形式，其中 $p(x)$ 及 $q(x)$ 均為多項式。

(ii) 以 x 表 $\frac{d}{dx}e^u$ 。

7. (b) 曲線 Γ 的方程為 $y = (x^2 + x + e)^{2x+1}$ 。將 Γ 與 y 軸的交點記為 H 。求 Γ 在 H 的切線的方程。

(7分)

$$\begin{aligned} \text{a(i)} \quad e^u &= (x^2 + x + e)^{2x+1} \\ u &= (2x+1) \ln(x^2 + x + e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{du}{dx} &= 2 \ln(x^2 + x + e) + \frac{(2x+1)(2x+1)}{(x^2 + x + e)^2} \\ &= 2 \ln(x^2 + x + e) + \frac{(2x+1)^2}{(x^2 + x + e)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e^u &= e^u \cdot \frac{du}{dx} \\ &= e^u \left[2 \ln(x^2 + x + e) + \frac{(2x+1)^2}{(x^2 + x + e)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad y|_{x=0} = (0^2 + 0 + e)^{2(0)+1} = e$$

$$u|_{x=0} = (1) \ln(0^2 + 0 + e) = 1$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = e \left(2 + \frac{1}{e^2} \right) = 2e + \frac{1}{e}$$

故切線方程：

$$\frac{y-e}{x-0} = 2e + \frac{1}{e}$$

$$y = (2e + \frac{1}{e})x + e$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$-x^2(625-x^2)$$

$$\sqrt{20^2+15^2}=25$$

7. 某電腦程式調整一長方形數碼圖片的長及闊，使得其對角線的長度維持不變，而其闊以恆速率 0.5 cm s^{-1} 減少。初始時，該圖片的長及闊分別為 20 cm 及 15 cm 。把該圖片的闊記為 $x \text{ cm}$ 。求當 $x=7$ 時該圖片的面積的變率。 (4分)

$$\text{對角線長度} = \sqrt{20^2+15^2} = 25$$

$$\text{設面積為 } A, A = x \sqrt{25^2 - x^2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \left[\sqrt{625-x^2} + \frac{1}{2}x(625-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \right] \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{625-x^2-x^2}{\sqrt{625-x^2}} \right) \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{625-2x^2}{\sqrt{625-x^2}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\text{當 } x=7, \frac{dx}{dt} = -0.5$$

$$\frac{dA}{dt} \Big|_{x=7} = \frac{625-2(7)^2}{\sqrt{625-7^2}} \cdot (-0.5)$$

$$\approx -10.9792 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. (a) 利用第 24 頁的標準正態分佈表，計算 $\int_0^{0.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ 。

(b) 考慮曲線 $C: y = (2x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ ，其中 $x \geq 0$ 。利用 (a) 的結果，求 C 、 x 軸與 y 軸圍成的區域的面積。

(7 分)

$$\begin{aligned} a) \quad & \int_0^{0.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \sqrt{2\pi} \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \sqrt{2\pi} (0.1915) \\ &\approx 0.4800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \frac{dy}{dx} = 0 \\ & (2x-1)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \\ & x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{所求面積:} \\ & \left| \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{\frac{1}{2}} 2xe^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \\ &= \left| \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} e^{-u} du - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \\ &= \left| 2[-e^{-u}]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2\pi} (0.1915) \right| \\ &= \left| 2(-e^{-\frac{1}{8}} + 1) - \sqrt{2\pi} (0.1915) \right| \\ &= \sqrt{2\pi} (0.1915) - 2(1 - e^{-\frac{1}{8}}) \\ &\approx 0.2450 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u = \frac{x^2}{2} \\ & du = x dx \\ & \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}, u = \frac{1}{8} \\ & \frac{1}{2}x = 0, u = 0 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

Blank lined area for writing answers.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50 分)

9. 某大市場內每個南瓜的重量依循一平均值為 μ kg 及標準差為 σ kg 的正態分佈。已知該市場內 30.85% 的南瓜每個重量均多於 5.7 kg，而 78.88% 的南瓜每個重量均介乎 $(\mu - 1.5)$ kg 與 $(\mu + 1.5)$ kg 之間。

(a) 求 μ 及 σ 。 (3 分)

(b) 假定在該市場內隨機選取 16 個南瓜。求這些南瓜的平均重量不超過 5.4 kg 的概率。 (2 分)

(c) 下表顯示該市場內的南瓜的等級及價錢。

一個南瓜的重量 (W kg)	$W \leq 3.6$	$3.6 < W \leq 5.7$	$W > 5.7$
等級	C	B	A
價錢 (\$)	50	80	100

假定在該市場內隨機選取 8 個南瓜並把這些南瓜放進一手推車內。

(i) 求手推車內該些南瓜價錢的期望值。

(ii) 求手推車內有至少 5 個 B 等級的南瓜及至少 1 個 A 等級的南瓜的概率。 (6 分)

$$a) P\left(\frac{-1.5}{\sigma} < Z < \frac{1.5}{\sigma}\right) = 0.7888$$

$$P\left(0 < Z < \frac{1.5}{\sigma}\right) = 0.3944$$

$$\frac{1.5}{\sigma} = 1.25$$

$$\sigma = 1.2$$

$$P\left(Z > \frac{5.7 - \mu}{1.2}\right) = 0.3085$$

$$P\left(0 < Z < \frac{5.7 - \mu}{1.2}\right) = 0.1915$$

$$\frac{5.7 - \mu}{1.2} = 0.50$$

$$\mu = 5.1$$

b) 根據題意

$$P\left(Z \leq \frac{5.4 - 5.1}{\frac{1.2}{\sqrt{16}}}\right)$$

$$= P(Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413$$

$$= 0.8413$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

0 X

$$(1)(i) \text{ 期望值} = 0.3085(100) + 0.5859(80) + (1-0.3085-0.5859)(50) \\ \approx 83.002$$

$$(1)(ii) \text{ B等組有的概然率} = P\left(\frac{3.6-5.1}{1.2} < Z < \frac{5.7-5.1}{1.2}\right) \\ = P(-1.25 < Z < 0.5) \\ = 0.3944 + 0.1915 \\ = 0.5859$$

$$\text{令 } a = 0.3085, \quad b = 0.5859$$

所求概然率：

$$1 - \left[(1-b)^8 + C_1^8(b)(1-b)^7 + C_2^8(b)^2(1-b)^6 + C_3^8(b)^3(1-b)^5 + C_4^8(b)^4(1-b)^4 + (1-a)^8 \right] \\ \approx 0.5089$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. 一派遞員每天均派送貨物。每天派送延誤的數目依循一平均值為 1.6 的泊松分佈。若某天延誤的數目少於 3，則當天稱為順利。

- (a) 求某天為順利的概率。 (2分)
- (b) 求某星期內全部 7 天均為順利的概率。 (2分)
- (c) 已知某星期內全部 7 天均為順利，求該星期內恰有 10 次延誤的概率。 (4分)
- (d) 已知某星期內有至少 2 天沒有延誤，求該星期內全部 7 天均為順利的概率。 (4分)

a) 求其概率:

$$e^{-1.6} \left(1 + 1.6 + \frac{1.6^2}{2} \right)$$

$$\approx 0.7834$$

b) 求其概率:

$$(0.7834)^7$$

$$\approx 0.1810$$

c) 求其概率:

$$\frac{[e^{-1.6}]^7 \left[C_5 \left(\frac{1.6^5}{2} \right) (1)^2 + C_4 \left(\frac{1.6^4}{2} \right) C_2 (1.6)^2 + C_3 \left(\frac{1.6^3}{2} \right) (1.6)^4 \right]}{0.1810}$$

$$\approx 0.0963$$

d) 求其概率:

$$\frac{C_2 (e^{-1.6})^2 \times (0.7834)^5}{1 - [(1 - e^{-1.6})^7 + C_1 (e^{-1.6}) (1 - e^{-1.6})^6]}$$

$$\approx 0.5893$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 某天 M 城的累積雨量以每小時 P mm 的速率增加。已知

$$P = a(-t^2 + 10t + 8)e^{bt},$$

其中 a 及 b 均為常數，且 t ($0 \leq t \leq 4$) 為自當天上午 7 時起計所經過的時數。得知 $\ln\left(\frac{P}{-t^2 + 10t + 8}\right)$ 為 t 的線性函數，且這線性函數的圖像通過點 $(3, -0.1)$ 及水平軸上的截距為 2.5。

$$\frac{y - 0}{x - 2.5} = -0.2 \quad \text{點 } (2.5, 0)$$

$$y = -0.2x + 0.5 \quad (1 \text{ 分})$$

(a) 將 $\ln\left(\frac{P}{-t^2 + 10t + 8}\right)$ 表為 t 的線性函數。

(b) 求 a 及 b 的真確值。

4 (3 分)

(c) 利用梯形法則將區間分成 4 個子區間，估計 M 城當天由上午 7 時至上午 11 時的累積雨量。

(2 分)

(d) 同一天 N 城的累積雨量以每小時 Q mm 的速率增加。已知

$$Q = \frac{16(2t + 5)e^{0.4t}}{4te^{0.4t} + 3},$$

其中 t ($0 \leq t \leq 4$) 為自當天上午 7 時起計所經過的時數。

(i) 求 $\int Q dt$ 。

(ii) 某人宣稱 M 城與 N 城當天由上午 7 時至上午 11 時的累積雨量之和大於 160 mm。你是否同意？解釋你的答案。

(8 分)

$$a) \quad P = a(-t^2 + 10t + 8)e^{bt}$$

$$\ln\left(\frac{P}{-t^2 + 10t + 8}\right) = bt + \ln a$$

$$b) \quad b = \frac{-0.1 - 0}{3 - 2.5} = -0.2$$

$$\text{把 } (3, -0.1) \text{ 代入 } \ln\left(\frac{P}{-t^2 + 10t + 8}\right) = bt + \ln a$$

$$-0.1 = -0.2(3) + \ln a$$

$$a = e^{\frac{1}{2}}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$c) \text{ 設 } f(x) = p = e^{\frac{1}{2}}(-t^2 + 10t + 8)e^{-0.2t}$$

估計累積雨量:

$$\int_0^4 f(x) dx$$

$$n = 4$$

$$\Delta x = 1$$

$$\approx \frac{1}{2} [f(0) + f(4) + 2(f(1) + f(2) + f(3))]$$

$$\approx 94.1600$$

①

$$d) (i) \int 2 dt$$

$$= \int \frac{16(2t+5)e^{0.4t}}{4te^{0.4t}+3} dt$$

$$= \int \frac{80(1+0.4t)e^{0.4t}}{4te^{0.4t}+3} dt$$

$$= 20 \int \frac{1}{u} du$$

$$= 20 \ln|u| + C$$

$$= 20 \ln|4te^{0.4t}+3| + C$$

$$\frac{1}{2} u = 4te^{0.4t}+3$$

$$du = 4(e^{0.4t} + 0.4te^{0.4t}) dt$$

$$= 4e^{0.4t}(1+0.4t) dt$$

$$(ii) \int_0^4 Q dt$$

$$= 20 [\ln|4te^{0.4t}+3|]_0^4$$

$$= 20 [\ln(16e^{1.6}+3) - \ln 3]$$

$$\approx 66.2227$$

$$p = e^{\frac{1}{2}}(-t^2 + 10t + 8)e^{-0.2t}$$

$$\frac{dp}{dt} = e^{\frac{1}{2}} [(-2t+10)e^{-0.2t} - 0.2(-t^2+10t+8)e^{-0.2t}]$$

$$= e^{\frac{1}{2}} [2(-t+5)e^{-0.2t} - 0.2(-t^2+10t+8)e^{-0.2t}]$$

$$= e^{\frac{1}{2}} (-2te^{-0.2t} + 10e^{-0.2t} + 0.1t^2e^{-0.2t} - 2te^{-0.2t} - 1.6e^{-0.2t})$$

$$= e^{\frac{1}{2}} (0.2t^2 - 4t + 8.4)e^{-0.2t}$$

$$\frac{dp}{dt^2} = e^{\frac{1}{2}} [(0.4t-4)e^{-0.2t} - 0.2(0.2t^2-4t+8.4)e^{-0.2t}]$$

$$= e^{\frac{1}{2}} (0.4t-4-0.04t^2+0.8t-1.68)e^{-0.2t}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} (-0.04t^2 + 1.2t - 5.68)e^{-0.2t}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

← check

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

-5.497

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\text{對於 } 0 < x < 4, \quad (-0.04t^2 + 1.2t - 5.68) < 0$$

$$\frac{dp'}{dt} < 0$$

∴ (1) 值為正值

從 (1) 的終值為 p'

$$p > p'$$

$$p + Q > p' + Q$$

$$p + Q > 94.1600 + 66.2227$$

$$p + Q > 160.3836 \text{ mm}$$

$$p + Q > 160 \text{ mm}$$

∴ 我同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$+10e^{-0.5t} - 10e^{-0.5t} - 5 + 5$$

12. 設 R (以千元為單位) 為某網上商店的總營業額。已知

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5} + 2,$$

其中 t ($t \geq 0$) 為自該商店開張起計所經過的月數。

(a) 該商店的總營業額的最大變率是否超過每月 4 千元? 解釋你的答案。 (4 分)

(b) 設 P (以千元為單位) 為該商店的總盈利。已知

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt} - 10(0.8)^{2t+3},$$

其中 t ($t \geq 0$) 為自該商店開張起計所經過的月數。

(i) 求自該商店開張起計首 12 個月內該商店的總盈利。

(ii) 估計經過一段很長時間後該商店的總盈利的變率。

(9 分)

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5} + 2 \\ \frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)(e^{0.5t} + 2.5e^{-0.5t}) - (2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t})(e^{0.5t} - 2.5e^{-0.5t})}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2} \\ &= \frac{2e^t + 5 - 5e^{0.5t} + 5 + 12.5e^{-t} - 12.5e^{-0.5t} - (2e^t + 5 + 5 - 12.5e^{-t})}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2} \\ &= \frac{20 - 5e^{0.5t} - 12.5e^{-0.5t}}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2} \\ &= \frac{-5(e^{0.5t})^2 + 20e^{0.5t} - 12.5}{e^{0.5t}} \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

✓ phil

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$c) \frac{dR}{dt} = \frac{2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5} + 2$$

$$= 1 + \frac{5 - 10e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5} + 2$$

$$= 3 + 5 \times \frac{1 - 2e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5}$$

$$\frac{dR^2}{dt^2} = 5 \times \frac{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)(e^{-0.5t}) - (1 - 2e^{-0.5t})(e^{0.5t} - 2.5e^{-0.5t})}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2}$$

$$= 5 \times \frac{2 + 5e^{-t} - 5e^{-0.5t} - e^{0.5t} + 2 + 2.5e^{0.5t} - 5e^{-t}}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2}$$

$$= 5 \times \frac{4 - 2.5e^{-0.5t} - e^{0.5t}}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2}$$

$$= 5 \times \frac{(e^{0.5t})^2 + 4e^{0.5t} - 2.5}{e^{0.5t}(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2}$$

$$\frac{dR^2}{dt^2} = 0$$

$$5 \times \frac{(e^{0.5t})^2 + 4e^{0.5t} - 2.5}{e^{0.5t}(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2} = 0$$

$$e^{0.5t} \approx 0.7753 \text{ 或 } e^{0.5t} \approx 3.2247$$

$$(接續) t \approx -0.5091 \text{ 或 } t \approx 2.3417$$

x	$t < 2.3417$	$t \approx 2.3417$	$t > 2.3417$
$\frac{dR}{dt}$	+	0	-

$$\frac{dR}{dt} \Big|_{t \approx 2.3417} = \frac{2e^{0.5(2.3417)} - 5e^{-0.5(2.3417)}}{2e^{0.5(2.3417)} + 5e^{-0.5(2.3417)} - 5} + 2$$

$$\approx 3.6330 \text{ 元}$$

$$< 4 \text{ 元}$$

∴ 不超過

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

b(1) 所求總額:

$$\sum u = 2t + 3$$

$$| [R]_0^{12} - 10 \int_0^{12} (0.8)^{2t+3} dt |$$

$$du = 2 dt$$

$$= | [R]_0^{12} - 5 \int_3^{27} 0.8^u du |$$

$$\frac{1}{2}t = 12, u = 27$$

$$\frac{1}{2}t = 0, u = 3$$

$$= \left| \left[\frac{2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t}} + 2 \right]_0^{12} - 5 \left[\frac{0.8^u}{\ln 0.8} \right]_3^{27} \right|$$

$$= \left| \frac{2e^6 - 5e^{-6}}{2e^6 + 5e^{-6}} + 2 - \left(\frac{2-5}{2+5-5} + 2 \right) - 5 \left(\frac{0.8^{27}}{\ln 0.8} - \frac{0.8^3}{\ln 0.8} \right) \right|$$

$$\approx 8.9121 \text{ 千元}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$(2)(ii) \quad \frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt} - 10(0.8)^{2t+3}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2R}{dt^2} - 10(2)(0.8)^{2t+3} \ln(2t+3)$$

$$= \frac{d^2R}{dt^2} - 20(0.8)^{2t+3} \ln(2t+3)$$

$\therefore \frac{d^2P}{dt^2}$ 在 $t > 2.3417$ 遞減

$$\text{而 } -20(0.8)^{2t+3} \ln(2t+3) < 0$$

$$\therefore \frac{d^2P}{dt^2} < 0$$

$\hookrightarrow$ 遞減

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

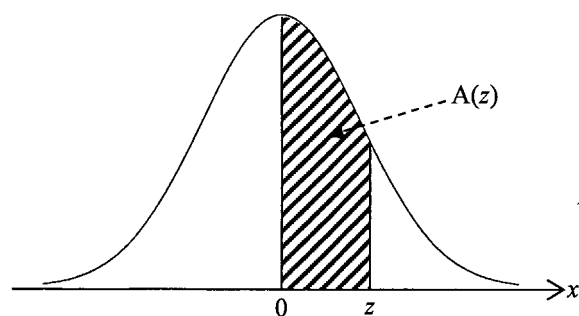
- 試卷完 -

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註： 本表所列數字為標準正態曲線下由 $x=0$ 至 $x=z$ ($z \geq 0$) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

香港考試及評核局
2024年香港中學文憑考試

數學 延伸部分
單元一（微積分與統計）
試題答題簿

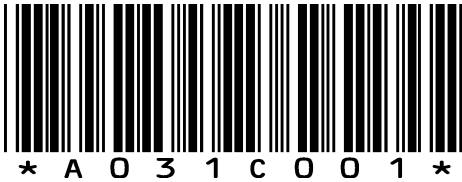
本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
(上午八時三十分至上午十一時)

考生須知

- (一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9 及 11 頁之適當位置貼上電腦條碼。
- (二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。
- (三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
- (四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。
- (五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
- (六) 除特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。
- (七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



甲部 (50 分)

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 a 及 b 均為常數使得 $6 < b < 15$ 。

x	0	3	6	b	15
$P(X=x)$	0.3	a	0.1	0.2	0.2

已知 $\text{Var}(5X) = 739$ 。

- (a) 求 a 及 b 。

- (b) 設 C 為事件 $0 < X \leq 7$ 。

- (i) 設 D 為事件 $4 < X \leq 15$ 。 C 與 D 是否獨立？解釋你的答案。

- (ii) 設 E 為一事件使得 $P(E) \neq 0$ 。若 C 與 E 互斥，寫出 $P(E)$ 的最大可取值。
(7 分)

$$(a) \quad 0.3 + a + 0.1 + 0.2 + 0.2 = 1$$

$$a = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$\text{Var}(5X) = 25 \text{Var}(X) = 25 [E(X^2) - [E(X)]^2]$$

$$= 25 [9a + 36 \times 0.1 + b^2 \times 0.2 + 15^2 \times 0.2 - (3a + 6 \times 0.1 + b \times 0.2 + 15 \times 0.2)^2]$$

$$= 25 [1.8 + 3.6 + 0.2b^2 + 45 - (0.6 + 0.6 + 0.2b + 3)^2]$$

$$= 25 [50.4 + 0.2b^2 - (4.2 + 0.2b)^2]$$

$$= 25 [50.4 + 0.2b^2 - 17.64 - 1.68b - 0.04b^2]$$

$$= 25 [0.16b^2 - 1.68b + 32.76]$$

$$25 (0.16b^2 - 1.68b + 32.76) = 739$$

$$0.16b^2 - 1.68b + 32.76 - 29.56 = 0$$

$$b_1 = 8 \quad b_2 = 2.5 \text{ (舍)}$$

$$\therefore 6 < b < 15$$

$$\therefore b_2 = 2.5 \text{ 舍去}$$

$$\therefore \begin{cases} a = 0.2 \\ b = 8 \end{cases}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$(b)(i) P(C) = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$P(D) = 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.5$$

$$P(C \cap D) = 0.1$$

$$P(C) \times P(D) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$$

$$\therefore P(C) \times P(D) = 0.15 \neq 0.1$$

$$\therefore P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$$

$\therefore C, D$ 不獨立。

$$(ii) \therefore C \text{ 与 } E \text{ 互斥}$$

$$\therefore P(C \cap E) = 0$$

$$P(C) + P(E) = P(C \cup E)$$

$$\therefore P(C \cup E) \leq 1, P(C) = 0.3$$

$$\therefore 0.3 + P(E) \leq 1$$

$$P(E) \leq 0.7$$

$\therefore P(E)$ 最大取 0.7

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 在一樂團中 $\frac{3}{5}$ 的成員佩戴眼鏡。在男成員當中，有 $\frac{4}{9}$ 佩戴眼鏡。隨機選出的一名成員是沒有佩戴眼鏡的女性的概率為 $\frac{3}{20}$ 。

(a) 已知隨機選出的一名成員沒有佩戴眼鏡，求該成員是女性的概率。

(b) 求隨機選出的一名成員是佩戴眼鏡的女性的概率。

(6分)

(a) 設佩戴眼鏡的事件為 $P(A)$ ，則不佩戴為 $P(A')$
是男成員的事件為 $P(B)$ ，則女成員為 $P(B')$

$$\text{已知: } P(A) = \frac{3}{5}$$

$$P(A' \cap B') = \frac{3}{20}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9}$$

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{\frac{3}{20}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{3}{8}$$

$$(b) P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{4}{9} = \frac{7}{45}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 投擲一枚硬幣，擲得字的概率為 p ，其中 $0 < p < 1$ 。當投擲該硬幣 20 次時，擲得 1 次字的概率與擲得 3 次字的概率之比為 $49:57$ 。

(a) 求 p 。

(b) 投擲該硬幣 k 次。求 k 的最小值使擲得至少 1 次字的概率大於 0.85。

(6 分)

$$(a) \frac{C_1^{20} p(1-p)^{19}}{C_3^{20} p^3(1-p)^{17}}$$

$$= \frac{20(1-p)^2}{1140 p^2}$$

$$= \frac{1-2p+p^2}{57 p^2}$$

$$\frac{1-2p+p^2}{57 p^2} = \frac{49}{57}$$

$$57 \times 49 p^2 = 57 - 114p + 57p^2$$

$$p_1 = \frac{1}{8} \quad p_2 = -\frac{1}{6} \text{ (舍)}$$

$$\because 0 < p < 1$$

$$\therefore p_2 = -\frac{1}{6} \text{ 舍去}$$

$$(b) 1 - \left(1 - \frac{1}{8}\right)^k > 0.85$$

$$-\left(\frac{7}{8}\right)^k > -0.15$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^k < 0.15$$

$$k > \log_{\frac{7}{8}} 0.15$$

$$k > 14.20729573$$

$$\therefore k \text{ 最小 } 15$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 某校各學生每星期的溫習時間依循一平均值為 μ 小時的正態分佈。從該校隨機選取一個 81 名學生的樣本。這些學生每星期的溫習時間之平均值及標準差分別為 13 小時及 1.75 小時。

(a) μ 的 $\beta\%$ 置信區間的寬度為 0.7。求 β 。

(b) 已知該樣本中有 ~~36~~ 名男生，且這些男生每星期的溫習時間之平均值及標準差分別為 12.5 小時及 2 小時。求該樣本中女生每星期的溫習時間之標準差。

[提示：樣本標準差為 $\sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)}$ 。]

(6 分)

$$(a) 2 \times z_{\frac{\beta}{2}} \times \frac{1.75}{\sqrt{81}} = 0.7$$

$$z_{\frac{\beta}{2}} = 1.8$$

$$\beta\% = 0.4641 \times 2$$

$$\beta = 92.82$$

$$(b) \bar{x} = \frac{13 \times 81 - 12.5 \times 36}{81 - 36} = 13.4 \text{ 小時}$$

$$\frac{1}{36-1} \left(\sum_{i=1}^{36} x_i^2 - 36 \times 12.5^2 \right) = 4$$

$$\sum_{i=1}^{36} x_i^2 - 5625 = 140$$

$$\sum_{i=1}^{36} x_i^2 = 5765$$

$$\frac{1}{81-1} \left(\sum_{i=1}^{81} x_i^2 - 81 \times 13^2 \right) = 1.75^2$$

$$\sum_{i=1}^{81} x_i^2 - 13689 = 245$$

$$\sum_{i=1}^{81} x_i^2 = 13934$$

$$\sum_{i=1}^{81-36} x_i^2 = 13934 - 5765 = 8169$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{81-36-1} (8169 - (81-36) \times 13.4^2)} = 1.420267262 \approx 1.4203$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 設 n 為一正數。

(a) 依 x 的升幂次序展開 $\frac{2}{e^{nx}}$ 至含 x^3 的項為止。

(b) 考慮 $(1+4x)^m + \frac{2}{e^{nx}}$ 的展開式，其中 m 為一正整數。已知該展開式中 x 及 x^2 的係數分別為 24 及 980。求該展開式中 x^3 的係數。

(7分)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{2}{e^{nx}} &= 2e^{-nx} \\ &= 2\left(1 + (-nx) + \frac{n^2x^2}{2!} + \frac{n^3x^3}{3!} + \dots\right) \\ &= 2\left(1 - nx + \frac{n^2x^2}{2} + \frac{n^3x^3}{6} + \dots\right) \\ &= 2 - 2nx + n^2x^2 + \frac{n^3x^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (1+4x)^m &= 1 + C_1^m(4x) + C_2^m(4x)^2 + C_3^m(4x)^3 + \dots \\ &= 1 + 4mx + 16 \cdot \frac{m(m-1)}{2} x^2 + 64 C_3^m x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$x \text{ 係數: } -2n + 8m = 24$$

$$x^2 \text{ 係數: } n^2 + 16m(m-1) - 2n \cdot 4m = 980$$

$$n^2 + 16m(m-1) - 8mn = 980$$

$$8m - 24 = 2n$$

$$n = 4m - 12$$

$$(4m-12)^2 + 16m^2 - 16m - 8m(4m-12) = 980$$

$$16m^2 - 96m + 144 + 16m^2 - 16m - 32m^2 + 96m = 980$$

$$x^3 \text{ 係數: } \frac{n^3}{3} + 64m(m-1)(m-2)x^3 \times 2 + 16C_3^m + n^2 \cdot 4m$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 設 $e^u = (x^2 + x + e)^{2x+1}$ 。

(i) 將 u 表為 $\underline{p(x)\ln(q(x))}$ 的形式，其中 $p(x)$ 及 $q(x)$ 均為多項式。

(ii) 以 x 表 $\frac{d}{dx}e^u$ 。

(b) 曲線 Γ 的方程為 $y = (x^2 + x + e)^{2x+1}$ 。將 Γ 與 y 軸的交點記為 H 。求 Γ 在 H 的切線的方程。

(7分)

$$(a) \ln(e^u) = (2x+1) \ln(x^2+x+e)$$

$$u = (2x+1) \ln(x^2+x+e)$$

$$(ii) \frac{d}{dx}e^u \quad u' = 2 \ln(x^2+x+e) + \frac{(2x+1)(2x+1)}{x^2+x+e}$$

$$= 2 \ln(x^2+x+e) + \frac{(2x+1)^2}{x^2+x+e}$$

$$\frac{d}{dx}e^u = (\ln e^u)' \times e^u$$

$$= \left[2 \ln(x^2+x+e) + \frac{(2x+1)^2}{x^2+x+e} \right] (x^2+x+e)^{2x+1}$$

$$(b) y = (x^2+x+e)^{2x+1}$$

$$\text{當 } x=0 \text{ 時, } y=e$$

$$H(0, e)$$

$$y' = \left[2 \ln e + \frac{1}{e} \right] \times e$$

$$= 2 \ln e + 1$$

$$\text{切線: } y = (2 \ln e + 1)x + e$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 某電腦程式調整一長方形數碼圖片的長及闊，使得其對角線的長度維持不變，而其闊以恆速率 0.5 cm s^{-1} 減少。初始時，該圖片的長及闊分別為 20 cm 及 15 cm 。把該圖片的闊記為 $x \text{ cm}$ 。求當 $x=7$ 時該圖片的面積的變率。 (4分)

闊為 x ，對角線為 $\sqrt{20^2 + 15^2} = 25$

$\therefore \text{長} = \sqrt{25^2 - x^2}$

$\frac{dx}{dt} = -0.5 \text{ cm/s}$

$S = x\sqrt{25^2 - x^2}$

$\frac{dS}{dx} = \sqrt{25^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25^2 - x^2}} = \sqrt{25^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25^2 - x^2}}$

$\frac{dS}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dS}{dx}$

$= -0.5 \times \left(\sqrt{25^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25^2 - x^2}} \right)$

當 $x=7$ 時， $\frac{dS}{dt} = -10.97916667$
 ≈ -10.9792

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. (a) 利用第 24 頁的標準正態分佈表，計算 $\int_0^{0.5} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ 。

(b) 考慮曲線 $C: y = (2x-1)e^{\frac{-x^2}{2}}$ ，其中 $x \geq 0$ 。利用 (a) 的結果，求 C 、 x 軸與 y 軸圍成的區域的面積。

(7 分)

$$(a) \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0.1915$$

$$\int_0^{0.5} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0.1915 \times \sqrt{2\pi}$$

$$= 0.480019314$$

$$\approx 0.4800.$$

$$(b) \begin{cases} \text{若 } x=0, y=-1 \\ \text{若 } y=0, x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = -\int_0^{0.5} (2x-1)e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$$= -\int_0^{0.5} 2x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} dx + \int_0^{0.5} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$$= -\int_0^{0.5} 2x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} dx + 0.480019314$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50 分)

9. 某大市場內每個南瓜的重量依循一平均值為 μ kg 及標準差為 σ kg 的正態分佈。已知該市場內 30.85% 的南瓜每個重量均多於 5.7 kg，而 78.88% 的南瓜每個重量均介乎 $(\mu - 1.5)$ kg 與 $(\mu + 1.5)$ kg 之間。

- (a) 求 μ 及 σ 。 (3 分)
- (b) 假定在該市場內隨機選取 16 個南瓜。求這些南瓜的平均重量不超過 5.4 kg 的概率。 (2 分)
- (c) 下表顯示該市場內的南瓜的等級及價錢。

一個南瓜的重量 (W kg)	$W \leq 3.6$	$3.6 < W \leq 5.7$	$W > 5.7$
等級	C	B	A
價錢 (\$)	50	80	100

假定在該市場內隨機選取 8 個南瓜並把這些南瓜放進一手推車內。

- (i) 求手推車內該些南瓜價錢的期望值。
- (ii) 求手推車內有至少 5 個 B 等級的南瓜及至少 1 個 A 等級的南瓜的概率。

(6 分)

設 - 南瓜重 X ,

$$(a) P(X > 5.7) = P(Z > \frac{5.7 - \mu}{\sigma}) = 0.3085$$

$$\frac{5.7 - \mu}{\sigma} = 0.5$$

$$\frac{1.5}{\sigma} = 1.25$$

$$\begin{cases} \sigma = 1.2 \\ \mu = 5.1 \end{cases}$$

$$(b) P(X < 5.4) = P(Z < \frac{5.4 - 5.1}{\frac{1.2}{\sqrt{16}}}) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

$$(c) P(W \leq 3.6) = P(Z \leq \frac{3.6 - 5.1}{1.2}) = 0.1056$$

$$P(3.6 < W \leq 5.7) = 0.5 - 0.1056 + 0.5 - 0.3085 = 0.5859$$

$$P(W > 5.7) = 0.3085.$$

$$E(X) = 8 \times (0.1056 \times 50 + 0.5859 \times 80 + 0.3085 \times 100)$$

$$= \cancel{664.08} + 664.0160 \approx 664.0160.$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\begin{aligned}
 & (ii) C_5^8 (0.5859)^5 C_1^3 (0.3085) \times 0.1056^2 + C_6^8 (0.5859)^6 C_1^2 (0.3085) \\
 & \times 0.1056 + C_7^8 (0.5859)^7 (0.3085) + C_5^8 (0.5859)^5 C_2^3 (0.3085)^2 (0.1056) \\
 & + C_5^8 (0.5859)^5 C_3^3 (0.3085)^3 + C_6^8 (0.5859)^6 \times C_2^2 \times 0.3085^2
 \end{aligned}$$

$$= 0.510086888 \approx 0.5101.$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. 一派遞員每天均派送貨物。每天派送延誤的數目依循一平均值為 1.6 的泊松分佈。若某天延誤的數目少於 3，則當天稱為順利。

$$X \sim \text{po}(1.6)$$

- (a) 求某天為順利的概率。 (2 分)
- (b) 求某星期內全部 7 天均為順利的概率。 (2 分)
- (c) 已知某星期內全部 7 天均為順利，求該星期內恰有 10 次延誤的概率。 (4 分)
- (d) 已知某星期內有至少 2 天沒有延誤，求該星期內全部 7 天均為順利的概率。 (4 分)

設延誤數目為 X

$$\begin{aligned} (a) \quad P(\text{某天順利}) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \frac{e^{-1.6} 1.6^0}{0!} + \frac{e^{-1.6} 1.6^1}{1!} + \frac{e^{-1.6} 1.6^2}{2!} \\ &= 0.783358489 \\ &\approx 0.7833 \end{aligned}$$

$$(b) \quad (0.7833)^7 = 0.181018883 \approx 0.1810$$

$$\begin{aligned} (c) \quad &\frac{C_4^7 P(X=1)^4 P(X=2)^3 + C_4^7 P(X=2)^4 C_1^3 P(X=0) P(X=1)^2 + C_5^7 P(X=2)^5 P(X=0)^2}{0.181018883} \\ &= 0.096294571 \\ &\approx 0.0963 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad &\frac{0.181018883}{1 - (1 - P(X=0))^7 - C_1^7 P(X=0)(1 - P(X=0))^6} \\ &= 0.422450533 \\ &\approx 0.4225 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 某天 M 城的累積雨量以每小時 P mm 的速率增加。已知

$$P = a(-t^2 + 10t + 8)e^{bt},$$

其中 a 及 b 均為常數，且 t ($0 \leq t \leq 4$) 為自當天上午 7 時起計所經過的時數。
得知 $\ln\left(\frac{P}{-t^2 + 10t + 8}\right)$ 為 t 的線性函數，且這線性函數的圖像通過點 $(3, -0.1)$ 及水平軸上的截距為 2.5。

- (a) 將 $\ln\left(\frac{P}{-t^2 + 10t + 8}\right)$ 表為 t 的線性函數。 (1 分)
- (b) 求 a 及 b 的真確值。 (3 分)
- (c) 利用梯形法則將區間分成 4 個子區間，估計 M 城當天由上午 7 時至上午 11 時的累積雨量。 (2 分)
- (d) 同一天 N 城的累積雨量以每小時 Q mm 的速率增加。已知

$$Q = \frac{16(2t+5)e^{0.4t}}{4te^{0.4t} + 3},$$

其中 t ($0 \leq t \leq 4$) 為自當天上午 7 時起計所經過的時數。

- (i) 求 $\int Q dt$ 。
- (ii) 某人宣稱 M 城與 N 城當天由上午 7 時至上午 11 時的累積雨量之和大於 160 mm。你是否同意？解釋你的答案。 (8 分)

$$(a) \ln\left(\frac{P}{-t^2 + 10t + 8}\right) = \ln\left(\frac{a(-t^2 + 10t + 8)e^{bt}}{-t^2 + 10t + 8}\right)$$

$$= \ln(ae^{bt})$$

$$= \ln a + bt$$

$$= bt + \ln a$$

(b) 將 $(3, -0.1)$ 及 $(2.5, 0)$ 代入 ~~得~~ 得

$$\begin{cases} -0.1 = 3b + \ln a \\ 0 = 2.5b + \ln a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -0.2 \\ a = e^{0.5} \end{cases}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$10) \frac{11-7}{4} = 1 \quad 7, 8, 9, 10, 11$$

$$\int_7^{11} e^{0.5} (-t^2 + 10t + 8) e^{-0.2t} dt$$

$$= \frac{1}{2} e^{0.5} (-7^2 + 10 \times 7 + 8) e^{-0.2 \times 7} + e^{0.5} (-8^2 + 10 \times 8 + 8) e^{-0.2 \times 8} + e^{-0.5} (-9^2 + 10 \times 9 + 8) e^{-0.2 \times 9} + e^{-0.5} (-10^2 + 10 \times 10 + 8) e^{-0.2 \times 10} + \frac{1}{2} e^{0.5} (-11^2 + 10 \times 11 + 8) e^{-0.2 \times 11}$$

$$= 20.02822255 \approx 20.0282$$

$$(d) (i) \int \frac{16(2t+5)e^{0.4t}}{4te^{0.4t}+3} dt$$

$$\begin{aligned} \approx \frac{d}{dt} 4te^{0.4t} + 3 &= u, \quad u' = 4e^{0.4t} + 4t \cdot 0.4e^{0.4t} \\ &= 4e^{0.4t} + 1.6te^{0.4t} \\ &= (1.6t+4)e^{0.4t} \end{aligned}$$

$$\int \frac{16(2t+5)e^{0.4t}}{4te^{0.4t}+3} dt$$

$$= \int \frac{20(1.6t+4)e^{0.4t}}{4te^{0.4t}+3} dt$$

$$= 20 \int \frac{1}{u} du$$

$$= 20 \ln|u| + C$$

$$= 20 \ln|4te^{0.4t}+3| + C$$

$$(ii) \int_7^{11} \frac{16(2t+5)e^{0.4t}}{4te^{0.4t}+3} dt$$

$$= \left[20 \ln|4te^{0.4t}+3| \right]_7^{11} = 151.42313 \approx 151.4231$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$M+N=151.42313 + 20.0282 = 171.45133$$

$$\begin{aligned} \text{又} \because p' &= -0.2e^{0.5-0.2t}(-t^2+10t+8) + e^{0.5-0.2t}(-2t+10) \\ &= 0.2e^{0.5-0.2t}(t^2-10t+8) + e^{0.5-0.2t}(-2t+10) \\ &= e^{0.5-0.2t}(0.2t^2-2t+1.6-2t+10) \\ &= e^{0.5-0.2t}(0.2t^2-4t+11.6) \end{aligned}$$

$$\therefore (0 \leq t \leq 4)$$

$$0.2t^2-4t+11.6 < 0$$

$$\therefore p' < 0$$

* M的估值過低

$$\therefore M+N > 171.45133$$

$\therefore$ 同意

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 設 R (以千元為單位) 為某網上商店的總營業額。已知

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5} + 2,$$

其中 t ($t \geq 0$) 為自該商店開張起計所經過的月數。

- (a) 該商店的總營業額的最大變率是否超過每月 4 千元? 解釋你的答案。 (4 分)

- (b) 設 P (以千元為單位) 為該商店的總盈利。已知

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt} - 10(0.8)^{2t+3},$$

其中 t ($t \geq 0$) 為自該商店開張起計所經過的月數。

- (i) 求自該商店開張起計首 12 個月內該商店的總盈利。

- (ii) 估計經過一段很長時間後該商店的總盈利的變率。

(9 分)

$$\begin{aligned} \frac{d^2R}{dt^2} &= \frac{(e^{0.5t} + 2.5e^{-0.5t})(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5) - (2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t})(e^{0.5t} - 2.5e^{-0.5t})}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2} \\ &= \frac{(e^{0.5t} + 2.5e^{-0.5t})[(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5) - 2(e^{0.5t} - 2.5e^{-0.5t})]}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2} \\ &= \frac{(e^{0.5t} + 2.5e^{-0.5t})(10e^{-0.5t} - 5)}{(2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 0 \text{ 時, } 10e^{-0.5t} - 5 = 0 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & \frac{d^2R}{dt^2} & \\ \hline t < -2\ln 0.5 & + & \\ t = -2\ln 0.5 & 0 & \\ t > -2\ln 0.5 & - & \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2 \times (2) - 5 \times 0.5}{2 \times (2) + 5 \times 0.5 - 5} + 2$$

$$= 3 \text{ 千元} < 4 \text{ 千元}$$

∴ 當 $t = -2\ln 0.5$ 時
為極大值。

$$\text{當 } \frac{dR}{dt} \text{ 最大時, } \frac{dP}{dt} = 3 \text{ 千元} < 4 \text{ 千元}$$

∴ 否。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$(b) (i) \frac{dP}{dt} = 10(0.8)^{2t+3}$$

$$= \frac{2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5} + 2 - 10(0.8)^{2t+3}$$

$$\int_0^{12} \frac{dP}{dt} dt$$

$$= \int_0^{12} \frac{2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5} + 2 - 10(0.8)^{2t+3} dt$$

$$=$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2e^{0.5t} - 5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t} + 5e^{-0.5t} - 5} + 2 - 10(0.8)^{2t+3}$$

$$= -\frac{1}{5} + 2$$

$$= 1.8$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2024-DSE-MATH-EP(M1)–22

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

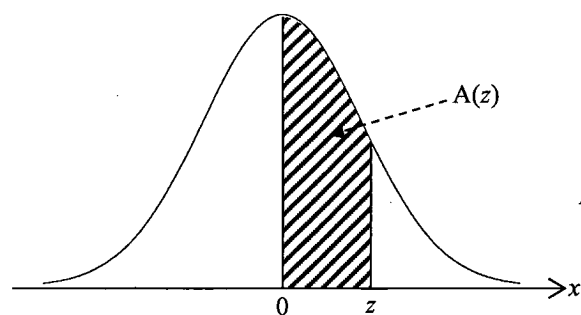
- 試卷完 -

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註：本表所列數字為標準正態曲線下由 $x=0$ 至 $x=z$ ($z \geq 0$) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$