第五級單元二
附評語之示例
2019-DSE
數學 延伸部分
單元二

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 1 9 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

請在此貼上電腦條碼

考生編號									

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

****

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

甲部（50 分）

1. 設 $f(x)=\dfrac{10x}{7+3x^2}$ 。證明 $f(1+h)-f(1)=\dfrac{4h-3h^2}{10+6h+3h^2}$ 。由此，從基本原理求 $f'(1)$ 。 (4 分)

$$f(1+h)-f(1)=\frac{10(1+h)}{7+3(1+h)^2}-\frac{10}{10}$$

$$=\frac{10+10h}{7+3+6h+3h^2}-1$$

$$=\frac{10+10h-10-6h-3h^2}{10+6h+3h^2}$$

$$=\frac{4h-3h^2}{10+6h+3h^2}$$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-3h}{10+6h+3h^2}$$

$$=\frac{4}{10}$$

$$=\frac{2}{5}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 設 $\mathrm{P}(x)=\begin{vmatrix} x+\lambda & 1 & 2 \\ 0 & (x+\lambda)^2 & 3 \\ 4 & 5 & (x+\lambda)^3 \end{vmatrix}$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$。已知 $\mathrm{P}(x)$ 的展開式中 x^3 的係數為 160。求

(a) λ，

(b) $\mathrm{P}'(0)$。

(5 分)

(a) $P(x)=(x+\lambda)^6+12-8(x+\lambda)^2-15(x+\lambda)$

$=x^6+6x^5\lambda+15x^4\lambda^2+20x^3\lambda^3+15x^2\lambda^4$

$+6x\lambda^5+\lambda^6+12-8x^2-16x\lambda-8\lambda^2$

$-15x-15\lambda$

$=x^6+6x^5\lambda+15x^4\lambda^2+20x^3\lambda^3+(15\lambda^4-8)x^2$

$+(6\lambda^5-16\lambda-15)x+(\lambda^6-8\lambda^2-15\lambda+12)$

$20\lambda^3=160$

$\lambda=\underline{\underline{2}}$

(b) $P'(x)=6x^5+60x^4+240x^3+480x^2$

$+464x+145$

$P'(0)=\underline{\underline{145}}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 某研究員進行實驗以探究在一容器內液體 X 的體積的變率。 該實驗維持 24 小時。於實驗開始時，該容器載有 580 cm^3 的液體 X。 該研究員得知在實驗期間，$\frac{dV}{dt}=-2t$，其中 $V\text{ cm}^3$ 為該容器內液體 X 的體積及 t 為自實驗開始起計所經過的時數。

(a) 該研究員宣稱該容器於實驗結束時載有一些液體 X。 該宣稱是否正確？ 解釋你的答案。

(b) 已知 $V=h^2+24h$，其中 $h\text{ cm}$ 為該容器內液體 X 的深度。 求當 $t=18$ 時 $\frac{dh}{dt}$ 的值。

(6 分)

(a) $\frac{dV}{dt}=-2t$

$V=-2\int t\,dt$

$V=-t^2+C$

$580=-(0)^2+C$

$C=580$

$\therefore V=-t^2+580$

當 $V=0$，$t^2=580$

$t\approx 24.08318916$

$t>24$

$\therefore$ 當實驗進行 24 小時，容器仍會載有一些液體 X。

因此，同意該宣稱。

(b) $V=h^2+24h$ $\qquad h^2+24h=-t^2+580$

$\frac{dV}{dt}=(2h+24)\frac{dh}{dt}$ $\qquad h^2+24h-256=0$

$-2(18)=(40)\frac{dh}{dt}$ $\qquad h=\frac{-24\pm 40}{2}$

$\frac{dh}{dt}=\frac{-9}{10}$ $\qquad h=8$ 或 -32 (捨去)

$\therefore$ 當 $t=18$ 時 $\frac{dh}{dt}$ 為 $\underline{\underline{\frac{-9}{10}\text{ cm/h}}}$。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 對所有 $x \in (0, 99)$ ， 定義 $g(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 。 將 $y = g(x)$ 的圖像記為 G 。

(a) 證明 G 只有一極大點。

(b) 設 R 為 G 、 x 軸與通過 G 的極大點的垂直線所圍成的區域。 求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。

(6 分)

(a) $g(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\ln x}{2x^{\frac{1}{2}}}}{x}$

$g'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$

當 $g'(x) = 0$ ， $2 - \ln x = 0$

$x = e^2$

x	$(0, e^2)$	e^2	$(e^2, 99)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

$\therefore$ G 只有一極大點。

(b) 該旋轉體的體積

$= \pi \int_1^{e^2} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

$= \pi \int_1^{e^2} \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx$

$= \pi \int_1^{e^2} (\ln x)^2 d(\ln x)$

$= \pi \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^{e^2}$

$= \dfrac{8\pi}{3}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n， $\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n+1}{n(2n+1)}$ 。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=50}^{200}\frac{1}{k(k+1)}$ 。

(7 分)

(a) 設 $S(n)$ 為命題「$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n+1}{n(2n+1)}$」。

當 $n=1$ 時，左方 $=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

右方 $=\frac{1+1}{1(2+1)}=\frac{2}{3}=$ 左方

$\therefore$ $S(1)$ 為真。

設當 $n=m$ 時，$S(m)$ 為真，即

$$\sum_{k=m}^{2m}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{m+1}{m(2m+1)}$$

當 $n=m+1$ 時，

$$\sum_{k=m}^{2(m+1)}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=m}^{2m}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+2)}+\frac{1}{(2m+2)(2m+3)}$$

$$=\frac{m+1}{m(2m+1)}+\frac{1}{(2m+1)(2m+2)}+\frac{1}{(2m+2)(2m+3)}$$

$$=\frac{(m+1)(2m+2)(2m+3)+m(2m+3)+m(2m+1)}{m(2m+1)(2m+2)(2m+3)}$$

$$=\frac{(2m+3)(2m+1)(m+2)+m(2m+1)}{m(2m+1)(2m+2)(2m+3)}$$

$$=\frac{(2m+3)(m+2)+m}{2m(m+1)(2m+3)}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b) $\sum_{k=50}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$

$= \sum_{k=50}^{100} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=101}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$

$= \sum_{k=50}^{100} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=100}^{200} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{100(101)}$

$= \frac{51}{50(101)} + \frac{101}{100(201)} - \frac{1}{100(101)}$

$= \frac{51}{5051} + \frac{101}{20100} - \frac{1}{10100}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases} x - 2y - 2z = \beta \\ 5x + \alpha y + \alpha z = 5\beta \\ 7x + (\alpha-3)y + (2\alpha+1)z = 8\beta \end{cases}，其中 \alpha, \beta \in \mathbf{R}。$$

(a) 假設 (E) 有唯一解。

(i) 求 α 值的範圍。

(ii) 以 α 及 β 表 y。

(b) 假設 $\alpha = -4$。若 (E) 無解，求 β 值的範圍。

(7 分)

(a)(i)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & \alpha & \alpha \\ 7 & \alpha-3 & 2\alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & \alpha+10 & \alpha+10 \\ 7 & \alpha+11 & 2\alpha+15 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+10)(2\alpha+15) - (\alpha+10)(\alpha+11)$$

$$= (\alpha+10)(\alpha+4)$$

$\because$ (E) 有唯一解

$\therefore \Delta \neq 0 \iff \alpha \neq -10, \alpha \neq -4$

$\underline{\alpha < -10, -10 < \alpha < -4, \alpha > -4}$

(ii)

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & \beta & -2 \\ 5 & 5\beta & \alpha \\ 7 & 8\beta & 2\alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta & -2 \\ 0 & 0 & \alpha+10 \\ 0 & \beta & 2\alpha+15 \end{vmatrix}$$

$$= -\beta(\alpha+10)$$

$$y = \frac{-\beta(\alpha+10)}{(\alpha+10)(\alpha+4)}$$

$$y = \underline{\frac{-\beta}{\alpha+4}}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b) 若 $\alpha = -4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & \beta \\ 5 & -4 & -4 & 5\beta \\ 7 & -7 & -7 & 8\beta \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & \beta \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & \beta \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\beta}{7} \end{array}\right)$$

若 (E) 無解，$\beta \neq 0$

$\therefore$ $\beta < 0$，$\beta > 0$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. (a) 利用分部積分法，求 $\int e^x \sin \pi x \, dx$ 。

(b) 利用代換積分法，計算 $\int_0^3 e^{3-x} \sin \pi x \, dx$ 。

(7 分)

(a) $\int e^x \sin \pi x \, dx$

$= \int \sin \pi x \, de^x$

$= e^x \sin \pi x - \frac{1}{\pi}\int e^x \cos \pi x \, dx$

$= e^x \sin \pi x - \frac{1}{\pi}\int \cos \pi x \, de^x$

$= e^x \sin \pi x - \frac{1}{\pi}\left[e^x \cos \pi x + \frac{1}{\pi}\int e^x \sin \pi x \, dx\right]$

$= e^x \sin \pi x - \frac{1}{\pi}(e^x \cos \pi x) - \frac{1}{\pi^2}\left(\int e^x \sin \pi x \, dx\right)$

$\left(1+\frac{1}{\pi^2}\right)\int e^x \sin \pi x \, dx$

$= e^x \sin \pi x - \frac{e^x \cos \pi x}{\pi}$

$\int e^x \sin \pi x \, dx = \frac{\pi^2}{1+\pi^2}\left(e^x \sin \pi x - \frac{e^x \cos \pi x}{\pi}\right)$

(b) 設 $y = 3 - x$

$dy = -dx \Rightarrow dx = -dy$

當 $x = 0$，$y = 3$；當 $x = 3$，$y = 0$

$\int_0^3 e^{3-x} \sin \pi x \, dx$

$= -\int_3^0 e^y \sin \pi(3-y) \, dy$

$= \int_0^3 e^y \sin(3\pi - \pi y) \, dy$

$= \int_0^3 e^y \sin(\pi - \pi y) \, dy$

$= \int_0^3 e^y \sin \pi y \, dy$

$= \int_0^3 e^x \sin \pi x \, dx$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\therefore \int_0^3 e^{3-x} \sin \pi x \, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{1+\pi^2}\left[e^x \sin \pi x - \frac{e^x \cos \pi x}{\pi}\right]_0^3$$

$$= \frac{\pi^2}{1+\pi^2}\left[e^3 \sin 3\pi - \frac{e^3 \cos 3\pi}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{1+\pi^2}\left(-e^3 + \frac{1}{\pi}\right)$$

$$= \frac{(1-e^3)\pi}{1+\pi^2}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 設 $\mathrm{h}(x)$ 為一定義在 $\mathbf{R}^+$ 上的連續函數，其中 $\mathbf{R}^+$ 為正實數集。已知對所有 $x>0$，$\mathrm{h}'(x)=\dfrac{2x^2-7x+8}{x}$。

(a) $\mathrm{h}(x)$ 是否一遞增函數？解釋你的答案。

(b) 將曲線 $y=\mathrm{h}(x)$ 記為 H。已知 H 通過點 $(1,3)$。求

(i) H 的方程，

(ii) H 的拐點。

(8 分)

(a) 考慮 $2x^2-7x+8$

$=2(x^2-\frac{7}{2}x)+8$

$=2(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}-\frac{49}{16})+8$

$=2(x-\frac{7}{4})^2+\frac{15}{8}$

$\therefore h'(x)=\dfrac{2(x-\frac{7}{4})^2+\frac{15}{8}}{x}>0$

($\because$ h(x) 為一定義在 $\mathbb{R}^+$ 上的連續函數，其中 $\mathbb{R}^+$ 為正實數集。)

$\therefore$ h(x) 是一遞增函數。

(b) (i) $h(x)=\int\dfrac{2x^2-7x+8}{x}dx$

$h(x)=\int(2x-7+\frac{8}{x})dx$

$h(x)=x^2-7x+8\ln|x|+C$

$h(1)=3=1-7+C$

$C=9$

$\therefore$ H 的方程：

$\underline{\underline{y=h(x)=x^2-7x+8\ln x+9}}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b) (ii) $h'(x) = \frac{2x^2 - 7x + 8}{x}$

$h''(x) = \frac{x(4x-7) - 2x^2 + 7x - 8}{x^2}$

$h''(x) = \frac{4x^2 - 7x - 2x^2 + 7x - 8}{x^2}$

$h''(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$

若 $h''(x) = 0$，$x = 2, -2$ (捨去)

x	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$h''(x)$	$-$	0	$+$

當 $x = 2$，$h(2) = 8\ln 2 - 1$

∴ H 的拐點

$= (2, 8\ln 2 - 1)$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

9. 考慮曲線 Γ: $y=\frac{1}{3}\sqrt{12-x^2}$ ，其中 $0<x<2\sqrt{3}$ 。將 Γ 在 $x=3$ 的切線記為 L。

(a) 求 L 的方程。 (3 分)

(b) 設 C 為曲線 $y=\sqrt{4-x^2}$ ，其中 $0<x<2$ 。已知 L 為 C 的切線。求

(i) L 與 C 的切點，

(ii) C 與 Γ 的交點，

(iii) L、C 與 Γ 圍成的區域的面積。

(9 分)

(a) $y=\frac{\sqrt{12-x^2}}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(12-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{3(12-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$. 當 $x=3$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$

L 的方程：

$\frac{y-\frac{1}{\sqrt{3}}}{x-3}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3}y-1=-x+3$

$x+\sqrt{3}y-4=0$

(b)(i) $L: y=\frac{-x+4}{\sqrt{3}}$

$\frac{(-x+4)^2}{3}=4-x^2$

$x^2-8x+16=12-3x^2$

$4x^2-8x+4=0$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$x = 1$, $y = \sqrt{3}$

$\therefore$ L 與 C 的切點 $= \underline{\underline{(1, \sqrt{3})}}$

(b)(ii) $\frac{1}{3}\sqrt{12-x^2} = \sqrt{4-x^2}$

$12-x^2 = 9(4-x^2) = 36-9x^2$

$8x^2 = 24$

$x = \sqrt{3}$

$y = 1$

$\therefore$ C 與 Γ 的交點 $= \underline{\underline{(\sqrt{3}, 1)}}$

(b)(iii) 該區域的面積

$= \int_{\sqrt{3}}^{1} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{12-x^2}\right) dx +$

$\int_{1}^{3} \left(\frac{-x+4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{12-x^2}\right) dx$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. (a) 設 $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 。證明 $\frac{1}{2+\cos 2x} = \frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}$ 。 (1 分)

(b) 計算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 。 (3 分)

(c) 設 $\mathrm{f}(x)$ 為一定義在 $\mathbf{R}$ 上的連續函數使得對所有 $x \in \mathbf{R}$ ， $\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$ 。
證明對任意 $a \in \mathbf{R}$ ， $\int_{-a}^{a} \mathrm{f}(x)\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 。 (4 分)

(d) 計算 $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{(2+\cos 2x)^2}\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x$ 。 (5 分)

(a) $\frac{1}{2+\cos 2x} = \frac{1}{2+\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \frac{1}{2\cos^2 x + 1} = \frac{1}{\frac{2}{\sec^2 x} + 1}$

$= \frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2+\cos 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\sec^2 x}\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{2}{2+\sec^2 x}\right) dx$

$= \frac{\pi}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + \sec^2 x}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\pi}{4}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(c)

設 $y = -x$

$dy = -dx$

當 $x = a$, $y = -a$

$x = -a$, $y = a$

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x) \ln(1+e^{x})\,dx$

$= -\int_{a}^{-a} f(-y) \ln(1+e^{-y})\,dy$

$= \int_{-a}^{a} f(-y) \ln\left(\frac{1+e^{y}}{e^{y}}\right) dy$

$= \int_{-a}^{a} f(-y) \ln(1+e^{y})\,dy$

$\quad - \int_{-a}^{a} f(-y) \ln e^{y}\,dy$

$= \int_{-a}^{a} f(-x) \ln(1+e^{x})\,dx$

$\quad - \int_{-a}^{a} f(-x) \ln e^{x}\,dx$

$= \int_{0}^{a} x f(x)\,dx$

(d)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 設 $M=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -1 & -6\end{pmatrix}$ 。將 2×2 單位矩陣記為 I 。

(a) 求一對實數 a 及 b 使得 $M^2=aM+bI$ 。 (3 分)

(b) 證明對所有正整數 n ， $6M^n=(1-(-5)^n)M+(5+(-5)^n)I$ 。 (4 分)

(c) 是否存在一對 2×2 實矩陣 A 及 B 使得對所有正整數 n ， $(M^n)^{-1}=A+\frac{1}{(-5)^n}B$ ？解釋你的答案。 (5 分)

(a) $M^2=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ -1 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -28\\ 4 & 29\end{pmatrix}$

$aM+bI=\begin{pmatrix}2a & 7a\\ -a & -6a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b & 7a\\ -a & -6a+b\end{pmatrix}$

$\therefore a=-4$, $2(-4)+b=-3 \Rightarrow b=5$

$\therefore \underline{\underline{a=-4, b=5}}$

(b) $M^2=-4M+5I$

設 $S(n)$ 為命題「$6M^n=(1-(-5)^n)M+(5+(-5)^n)I$」。

當 $n=1$ 時，左方 $=6M=\begin{pmatrix}12 & 42\\ -6 & -36\end{pmatrix}$

右方 $=6M+0I=\begin{pmatrix}12 & 42\\ -6 & -36\end{pmatrix}$

$\therefore$ 當 $n=1$ 時，$S(1)$ 為真。

設當 $n=k$ 時，$S(k)$ 為真，即

$6M^k=(1-(-5)^k)M+(5+(-5)^k)I$。

當 $n=k+1$ 時

$6M^{k+1}$

$=6M^kM$

$=[(1-(-5)^k)M+(5+(-5)^k)I]M$

$=(1-(-5)^k)M^2+(5+(-5)^k)M$

$=-4(1-(-5)^k)M+5(1-(-5)^k)I+$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$(5+(-5)^k)M$

$=[-4+4(-5)^k+5+(-5)^k]M+(5+(-5)^{k+1})I$

$=(1+(-5)^{k+1})M+(5+(-5)^n)I$

因此，$S(k+1)$ 爲真。

由數學歸納法可知，對所有正整數 n，命題 $S(n)$ 爲真。

(c) $$M^n=\frac{(1-(-5)^n)M}{6}+\frac{(5+(-5)^n)I}{6}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2(1-(-5)^n)}{6} & \frac{7(1-(-5)^n)}{6}\\ \frac{-(1-(-5)^n)}{6} & -(1-(-5)^n)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{5+(-5)^n}{6} & 0\\ 0 & \frac{5+(-5)^n}{6}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{7-(-5)^n}{6} & \frac{7-7(-5)^n}{6}\\ \frac{-(1-(-5)^n)}{6} & \frac{-1+7(-5)^n}{6}\end{pmatrix}$$

$$\det(M^n)=\frac{1}{36}\{[7-(-5)^n][-1+7(-5)^n]$$

$$+[1-(-5)^n][7-7(-5)^n]$$

$$\neq 0$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

因此，存在一對 2×2 實矩陣 A 及 B 使得對所有正整數 n，

$(M^n)^{-1} = A + \frac{1}{(-5)^n} B$。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 設 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 、 $\overrightarrow{OB}=-5\mathbf{i}-4\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{OC}=-5\mathbf{i}-12\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ ，其中 O 為原點及 t 為一常數。已知 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ 。

(a) 求 t 。 (3 分)

(b) 求 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 。 (2 分)

(c) 求角錐體 $OABC$ 的體積。 (2 分)

(d) 將包含 A 、 B 及 C 的平面記為 Π 。已知 P 、 Q 及 R 均為 Π 上的點使得 $\overrightarrow{OP}=p\mathbf{i}$ 、 $\overrightarrow{OQ}=q\mathbf{j}$ 及 $\overrightarrow{OR}=r\mathbf{k}$ 。設 D 為 O 在 Π 上的投影。

(i) 證明 $pqr\neq 0$ 。

(ii) 求 $\overrightarrow{OD}$ 。

(iii) 設 E 為一點使得 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{p}\mathbf{i}+\frac{1}{q}\mathbf{j}+\frac{1}{r}\mathbf{k}$ 。描述 D 、 E 與 O 之間的幾何關係。解釋你的答案。

(6 分)

(a) $\overrightarrow{AC}=-6\vec{i}-8\vec{j}+(t-2)\vec{k}$

$\overrightarrow{BC}=-8\vec{j}+(t-8)\vec{k}$

$\because |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$

$\therefore (-6)^2+(-8)^2+(t-2)^2=(-8)^2+(t-8)^2$

$36+64+t^2-4t+4=64+t^2-16t+64$

$104+12t=128$

$\underline{\underline{t=2}}$

(b) $\overrightarrow{AB}=-6\vec{i}+6\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 0 & 6\\ -6 & -8 & 0\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0 & 6\\ -8 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-6 & 6\\ -6 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-6 & 0\\ -6 & -8\end{vmatrix}\vec{k}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$= 48\vec{i} - 36\vec{j} + 48\vec{k}$$

(c) $\overrightarrow{AO} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AO})$

$= (48)(-1) + (-36)(4) + (48)(-2)$

$= -288$

角錐體OABC的體積

$= \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO} \right|$

$= \frac{1}{6} \times 288$

$= \underline{48}$

(d)(i) $|(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OR}|$

$= |(p\vec{i} \times q\vec{j}) \cdot r\vec{k}|$

$= |pq\vec{k} \cdot r\vec{k}|$

$= pqr$

$\neq 0$

(d)(ii) $\dfrac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \dfrac{48}{\sqrt{5904}}\vec{i} - \dfrac{36}{\sqrt{5904}}\vec{j} + \dfrac{48}{\sqrt{5904}}\vec{k}$

$\overrightarrow{OD} = \left(\overrightarrow{OA} \cdot \dfrac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}\right) \dfrac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{288}{\sqrt{5904}} \left(\dfrac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}\right)$

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{13824}{\sqrt{5904}}\vec{i} - \dfrac{10368}{\sqrt{5904}}\vec{j} + \dfrac{13824}{\sqrt{5904}}\vec{k}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

評語

考生在第 9 至12 題等不熟悉的廣闊情境和在第 1 至8 題等熟悉的情境中，成功並巧妙地運用課程中的代數與微積分概念，顯示其對這些概念有深入的認識和理解。

考生亦能精準而邏輯地運用數學語言和符號作出溝通、表達意念及作為論據，例如在第 1 題中懂得從基本原理求得導數；在第 2 題，能應用二項式定理求得展開式中 x^3 的係數，並能求得 λ 及 $\mathrm{P}'(0)$ 的值；在第 3 題，能完成證明並求得正確解及求得當 $t=18$ 時 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ 的值；在第 4 題，能證明 G 只有一極大點，並懂得利用適當的積分代換，正確計算旋轉體的體積；在第 6 題成功給出條件 $\Delta \neq 0$， 正確以 α 及 β 表 y，且運用高斯消去法求得正確的增廣矩陣，因而得出 β 值的範圍。

另外，考生能以邏輯、嚴謹和精要的方式成功地為第 9、11 及 12 題提供部分複雜的數學證明。

總括而言，考生能於處理複雜的課業時，運用多樣化的策略整合課程中不同領域的知識和技能。