

香港考試及評核局

2019年香港中學文憑考試

數學 延伸部分
單元一（微積分與統計）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
(上午八時三十分至上午十一時)

考生須知

- (一) 宣布開考後，考生須首先在第1頁之適當位置填寫考生編號，並在第1、3、5、7、9及11頁之適當位置貼上電腦條碼。
- (二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。
- (三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
- (四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。
- (五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
- (六) 除特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。
- (七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



甲部 (50 分)

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 k 為一常數：

x	8	11	k	27	32
$P(X=x)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

已知 $\text{Var}(X)=66$ 。求 k 、 $E(3X+5)$ 及 $\text{Var}(3X+5)$ 。(6分)

$$E(X) = 0.2 \times 8 + 0.1 \times 11 + 0.3k + 0.3 \times 27 + 0.1 \times 32$$

$$= 14 + 0.3k$$

$$E(X^2) = 8^2 \times 0.2 + 11^2 \times 0.1 + k^2 \times 0.3 + 27^2 \times 0.3 + 32^2 \times 0.1$$

$$= 346 + 0.3k^2$$

$$\therefore \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 346 + 0.3k^2 - (14 + 0.3k)^2$$

$$= 346 + 0.3k^2 - (14^2 + 2 \times 14 \times 0.3k + 0.3^2 k^2)$$

$$= 346 + 0.3k^2 - 196 - 8.4k - 0.09k^2 = 66$$

$$\therefore 0.21k^2 - 8.4k + 84 = 0, \quad (k-20)^2 = 0$$

$$k = 20$$

$$\therefore E(3X+5) = 3E(X) + 5$$

$$= 3 \times (14 + 0.3 \times 20) + 5$$

$$= 3 \times (14 + 6) + 5$$

$$= 3 \times 20 + 5$$

$$= 65$$

$$\text{Var}(3X+5) = 3^2 \text{Var}(X)$$

$$= 9 \times 66 = 594$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 設 A 及 B 為兩事件。將 A 及 B 的互補事件分別記為 A' 及 B' 。假定 $P(A' \cap B) = 0.12$ 及 $P(B' | A') = 2P(A)$ 。

(a) 藉考慮 $P(A' \cap B')$ ，或利用其他方法，求 $P(A)$ 。

(b) 若 A 與 B 獨立，求 $P(B)$ 。

(6分)

$$(a) \quad P(B' | A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')}$$

$$\therefore P(A' \cap B') = P(A') - P(A' \cap B) = P(A') - 0.12$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$\therefore P(B' | A') = \frac{P(A') - 0.12}{P(A')} = 2(1 - P(A'))$$

$$\therefore \frac{P(A') - 0.12}{P(A')} = 2 - 2P(A')$$

$$\geq P(A') - 2P(A')^2 = P(A') - 0.12$$

$$\geq P(A')^2 - P(A') - 0.12 = 0. \quad (P(A') - 0.6)(P(A') + 0.1) = 0$$

$$P(A') = 0.6 \text{ 或 } -0.1 \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$(b) \quad P(A' \cap B') = P(A') - 0.12 = 0.6 - 0.12 = 0.48$$

$$\therefore P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - 0.48 = 0.52 \quad \geq A \text{ 與 } B \text{ 獨立}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.52$$

$$\therefore P(B) = 0.52 - P(A)$$

$$= 0.52 - 0.4$$

$$= 0.12$$

$$\therefore P(B) = 0.12$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 某店鋪舉辦幸運抽獎。每一天，該幸運抽獎均設有大獎。當該大獎送出時，當天的幸運抽獎便會終止。在每次抽獎，獲得大獎的概率為 0.2。

- (a) 寫出每天獲得大獎的抽獎次數的平均值及方差。
- (b) 在每天的首 4 次抽獎之內，獲得大獎與未能獲得大獎的機會是否相等？試解釋你的答案。
- (c) 求在 5 天中每天均未能於首 4 次抽獎之內獲得大獎的概率。

(7分)

(a) 平均值: $\frac{1}{0.2} = 5$

方差: $\frac{1-0.2}{0.2^2} = 20$

(b). P(首4次內未獲大獎)

$= (1-0.2)^4 = 0.4096$

P(首4次內獲得大獎)

$= 0.2 + (1-0.2) \cdot 0.2 + (1-0.2)^2 \cdot 0.2 + (1-0.2)^3 \cdot 0.2$

$= 0.5904 \neq 0.4096$

∴ 不相等。

(c). $0.4096^5 = 0.011579215 \approx 0.0115$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 在每個月，某商店為其貨品提供折扣的概率為 0.35。若該商店在某個月提供折扣，則在該月獲利的概率為 0.7；否則在該月獲利的概率為 0.28。

(a) 求該商店在某月獲利的概率。

(b) 已知該商店在某月獲利，求該商店在該月提供折扣的概率。

(c) 求該商店在 12 個月內有至少 2 個月獲利的概率。

(6 分)

$$(a). 0.35 \times 0.7 + (1 - 0.35) \times 0.28 = 0.427$$

$$(b) \frac{0.35 \times 0.7}{0.427} = \frac{0.245}{0.427} = 0.573770491 \approx 0.5738$$

$$(c) P(\text{12個月內至少2個月獲利})$$

$$= 1 - P(\text{12個月內小於2個月獲利})$$

$$= 1 - \left[(1 - 0.427)^{12} + \binom{12}{1} (1 - 0.427)^{11} \times 0.427 \right]$$

$$= 1 - 0.012455095$$

$$= 0.987544904$$

$$\approx 0.9875$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 對所有 $x > -3$ ，定義 $f(x) = \frac{6-x}{x+3}$ 。

(a) 證明 $f(x)$ 遞減。

(b) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

(c) 求 $y = f(x)$ 的圖像、 x 軸與 y 軸圍成的區域的面積之真確值。

(6分)

$$(a) \frac{d}{dx} f(x)$$

$$= \frac{-(x+3) - (6-x)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{-x-3-6+x}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{-9}{(x+3)^2}$$

$$\therefore (x+3)^2 \text{ 在 } x > -3 \text{ 時 } > 0$$

$$\therefore x > -3 \text{ 時 } \frac{d}{dx} f(x) < 0$$

$\therefore f(x)$ 遞減。

$$(b) f(x) = \frac{-(x+3)+9}{x+3} = -1 + \frac{6}{x+3}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1 + 0 = -1$$

$$(c) f(x) = 0 \text{ 時 } \frac{6-x}{x+3} = 0 \quad x = 6:$$

$$\therefore \text{面積} = \int_0^6 \left(-1 + \frac{6}{x+3}\right) dx$$

$$= \left[-x + 6 \ln|x+3|\right]_0^6$$

$$= \left[-6 + 6 \ln 9 - 6 \ln 3\right]$$

$$= -6 + 12 \ln 3 - 6 \ln 3$$

$$= 6 \ln 3 - 6$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 依 x 的升幂次序展開 e^{-18x} 至含 x^2 的項為止。

(b) 設 n 為一正整數。若 $e^{-18x}(1+4x)^n$ 的展開式中 x^2 的係數為 -38 ，求 n 。

(6分)

$$(a) e^{-18x}$$

$$= 1 + (-18x) + \frac{(-18x)^2}{2!} + \dots$$

$$= 1 - 18x + 162x^2 + \dots$$

$$(b). e^{-18x} (1+4x)^n$$

$$= (1 - 18x + 162x^2 + \dots) [1 + C_1^n \times 4x + C_2^n \times (4x)^2]$$

展開式中
 $\therefore x^2$ 的係數為 $C_2^n \times 4^2 + C_1^n \times 4 \times (-18) + 162$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \times 16 - 72n + 162$$

$$= 8n^2 - 8n + 162$$

$$= 8n^2 - 80n + 162 = -38$$

$$8n^2 - 80n + 200 = 0.$$

$$n^2 - 10n + 25 = 0.$$

$$(n-5)^2 = 0$$

$$n = 5.$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 考慮曲線 $C: y = (x-2)\sqrt{3x+6} - 8x$ ，其中 $x > -2$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(b) 某人宣稱 C 的切線中，有兩條均為水平線。你是否同意？試解釋你的答案。

(6分)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{dy}{dx} &= \sqrt{3x+6} + (x-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3x+6}} - 8 \\ &= \frac{2\sqrt{3x+6} + \frac{3x-3}{\sqrt{3x+6}}}{2\sqrt{3x+6}} - 8 \\ &= \frac{9x+6}{2\sqrt{3x+6}} - 8 \end{aligned}$$

(b) 切線為水平線時 $\frac{dy}{dx} = 0$ 。

$$\therefore \frac{9x+6}{2\sqrt{3x+6}} - 8 = 0.$$

$$\frac{9x+6}{2\sqrt{3x+6}} = 8$$

$$16\sqrt{3x+6} = 9x+6.$$

$$256(3x+6) = 81x^2 + 108x + 36.$$

$$768x + 1536 = 81x^2 + 108x + 36.$$

$$81x^2 - 660x - 1500 = 0.$$

$$\Delta = (-660)^2 - 4 \times 81 \times (-1500) = 921600.$$

$$x_1 = \frac{660 + \sqrt{921600}}{2 \times 81} = \frac{660 + 960}{2 \times 81} = 10$$

$$x_2 = \frac{660 - \sqrt{921600}}{2 \times 81} = \frac{660 - 960}{2 \times 81} = -\frac{50}{27} \approx -1.8519 \dots$$

\therefore 同意。

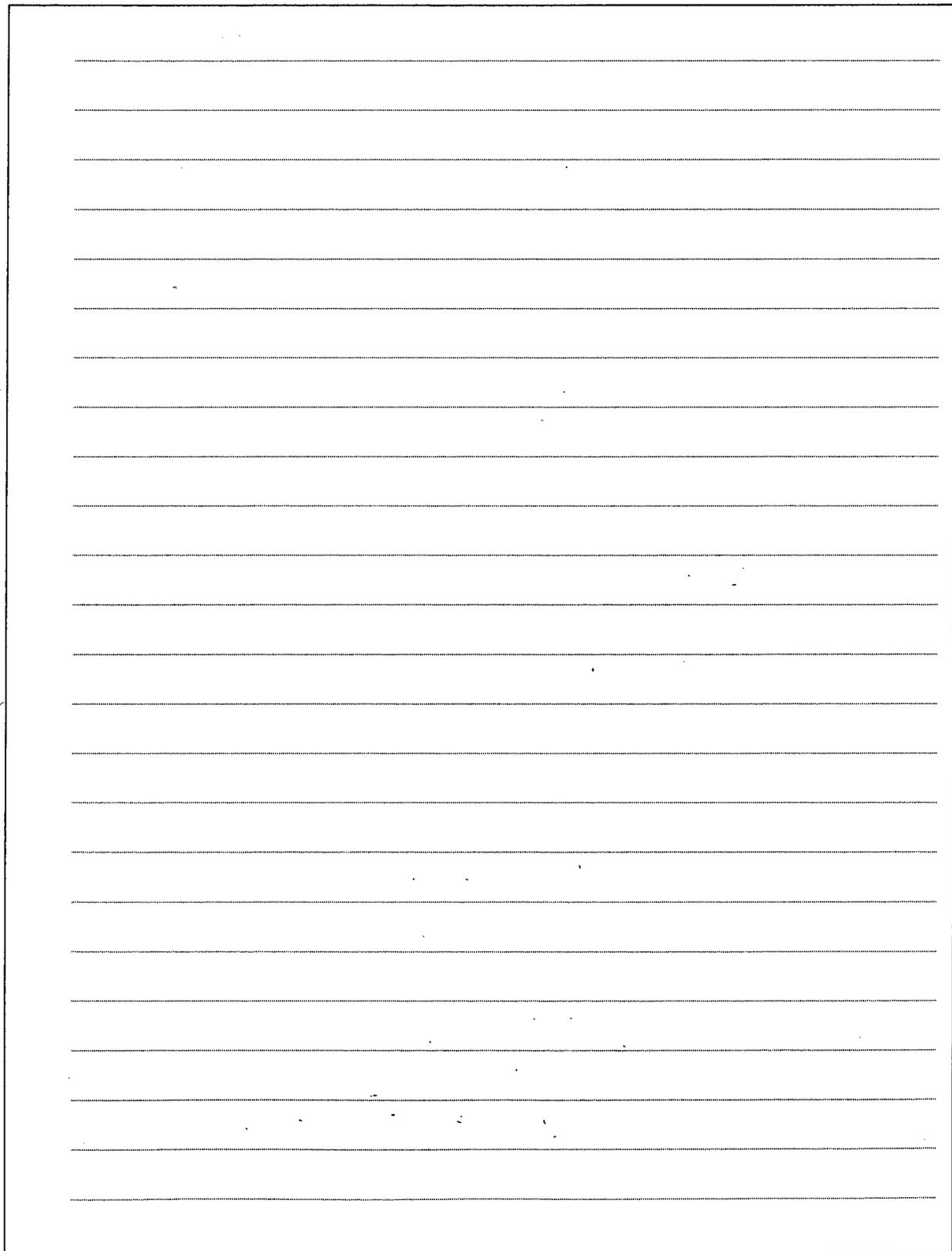
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. (a) 以 e 表 $7^{\frac{-1}{\ln 7}}$ 。
- (b) 藉考慮 $\frac{d}{dx}(x7^{-x})$ ，求 $\int x7^{-x} dx$ 。
- (c) 對所有實數 x ，定義 $h(x) = x7^{-x}$ 。已知方程 $h'(x) = 0$ 只有一實根 α 。求 α ，並以 e 表 $\int_0^\alpha h(x) dx$ 。

(7分)

$$(a) \quad \ln 7^{\frac{-1}{\ln 7}} = -\frac{1}{\ln 7} \cdot \ln 7 = -1$$

$$\therefore 7^{\frac{-1}{\ln 7}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx}(x7^{-x}) = 7^{-x} - x \cdot \ln 7 \cdot 7^{-x}$$

$$\therefore \int x7^{-x} dx = -\frac{1}{\ln 7} \int x \cdot \ln 7 \cdot 7^{-x} - 7^{-x} + 7^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{\ln 7} x \cdot 7^{-x} + \frac{1}{\ln 7} \int 7^{-x} dx + C$$

$$= -\frac{1}{\ln 7} x 7^{-x} + \frac{x^2}{2(\ln 7)^2} 7^{-x} + C_1$$

$$= -\frac{1}{\ln 7} 7^{-x} \left(x - \frac{x^2}{2 \ln 7} \right) + C_1$$

$$(c) \quad h'(x) = 7^{-x} - x \ln 7 \cdot 7^{-x} = 0.$$

$$\therefore 7^{-x} - x \ln 7 \cdot 7^{-x} = 0.$$

$$\therefore 7^{-x} (1 - x \ln 7) = 0.$$

$$x \ln 7 = 1 \quad x = \frac{1}{\ln 7}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{\ln 7}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\ln 7}} x 7^{-x} dx = \left[-\frac{1}{\ln 7} 7^{-x} \left(x - \frac{x^2}{2 \ln 7} \right) \right]_0^{\frac{1}{\ln 7}}$$

$$= \left[-\frac{1}{\ln 7} \cdot \frac{1}{e} \times \left(\frac{1}{\ln 7} - \frac{(\ln 7)^{-2}}{2 \ln 7} \right) + \frac{1}{\ln 7} (0 - 0) \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{\ln 7} \times \frac{1}{e} \times \left(\frac{1}{\ln 7} - \frac{1}{2(\ln 7)^2} \right) \right] = \frac{-1}{(\ln 7)^2 e} + \frac{1}{2(\ln 7)^3}$$

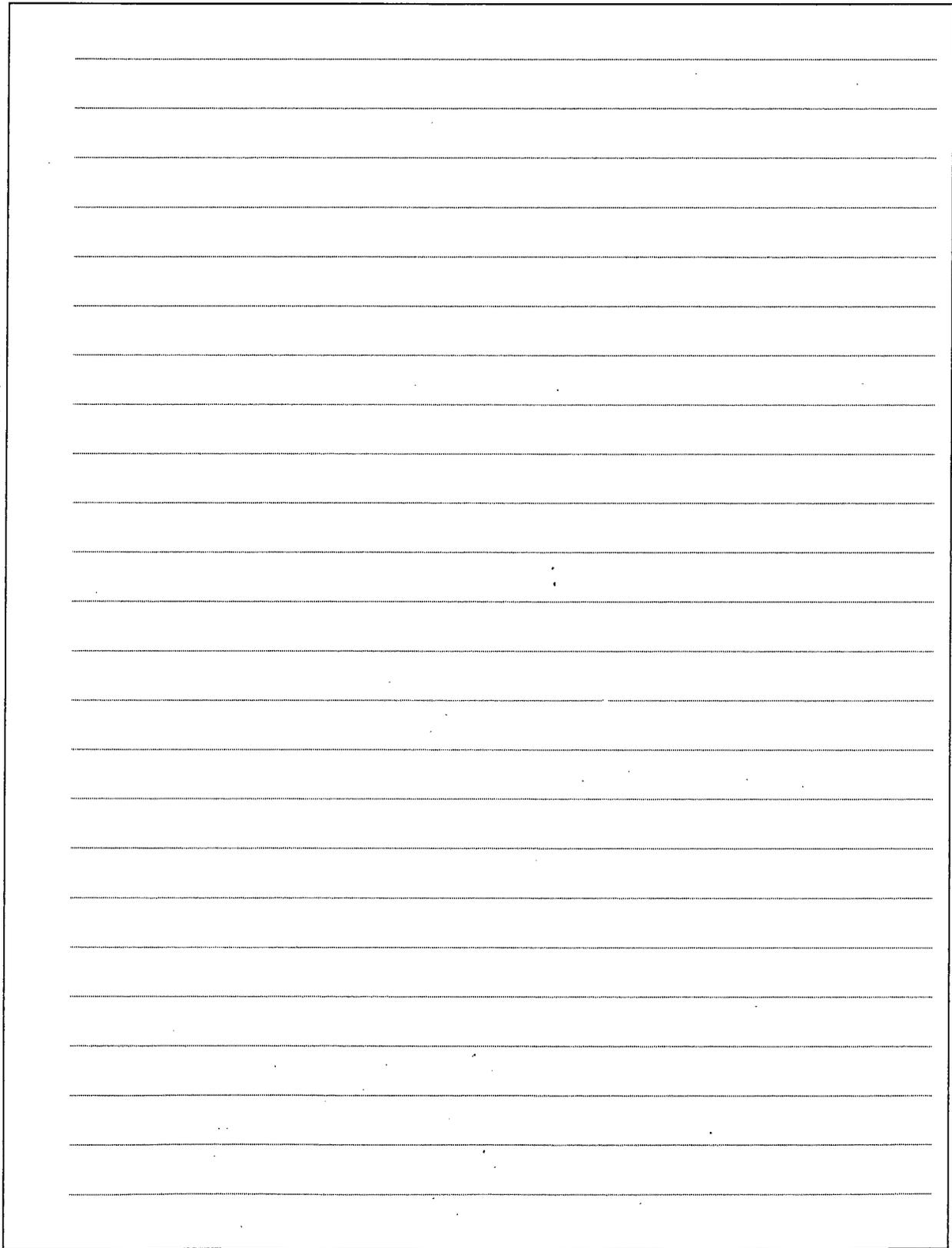
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50 分)

9. 某籃球隊在一季內勝出的場數依循一平均值為每季 3 場的泊松分佈。該隊在每場賽事的得分依循一平均值為 66 分及標準差為 10 分的正態分佈。

- (a) 求在某季內該隊勝出少於 6 場的概率。 (3 分)
- (b) 求某場賽事中該隊得分高於 70 分的概率。 (2 分)
- (c) 若該隊勝出一場賽事且該場賽事中得分高於 70 分，則該隊獲得一張獎狀。若在某季內該隊獲得多於 2 張獎狀，則在該季內該隊會獲頒獎金。
- (i) 求在某季內該隊勝出恰好 3 場且在該季內獲頒獎金的概率。
- (ii) 若在某季內該隊勝出恰好 4 場，求在該季內該隊獲頒獎金的概率。
- (iii) 已知在某季內該隊勝出少於 6 場，求在該季內該隊獲頒獎金的概率。 (7 分)

(a). 設某季內勝出場數為 X $X \sim P(0, 3)$

$$\begin{aligned}
 P(X < 6) &= P(0 \leq X \leq 5) \\
 &= P(e^{-3} + e^{-3} \cdot 3 + \frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^3}{3!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^4}{4!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^5}{5!}) \\
 &= 0.916082058 \\
 &\approx 0.9161.
 \end{aligned}$$

(b). 設某場賽事中該隊得分为 Y

$$\begin{aligned}
 Y &\sim N(66, 10^2) \\
 \therefore P(Y > 70) &= P(Z > \frac{70-66}{10}) = P(Z > 0.4) = 0.5 - 0.1554 = 0.3446
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \text{ (i)} \quad &P(X=3) \times 0.3446^3 + P(X=3) \times 0.3446^2 \times (1-0.3446) \times 6 \\
 &= \frac{e^{-3} \cdot 3^3}{3!} \times 0.3446^3 \\
 &= 0.009168005969 \approx 0.0092
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad &P(X=4) \times (0.3446^4 + 6 \times 0.3446^3 \times (1-0.3446)) \\
 &= \frac{e^{-3} \cdot 3^4}{4!} \times (0.3446^4 + 4 \times 0.3446^3 \times (1-0.3446)) \\
 &= 0.020395604 \approx 0.0204
 \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$P(\text{iii}) \quad \frac{0.0092 + 0.0204 + P(X=5)}{0.9161}$$

$P(\text{恰好有 5 項且款項})$

$$= \frac{e^{-3.3} 3^5}{5!} \times (0.3446^5 + C_1^5 0.3446^4 \times (1-0.3446) + C_2^5 \times 0.3446^3 \times (1-0.3446)^2)$$

$$= 0.022870257 \approx 0.0229$$

$\therefore P(\text{恰好有 5 項且款項})$

$$= \frac{0.009162005969 + 0.020395004 + 0.022870257}{0.9161}$$

$$= 0.057235964$$

$$\approx 0.0572$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. H 城中，每個家庭在某月的用水量（以 m^3 為單位）均依循一平均值為 μm^3 及標準差為 $4 m^3$ 的正態分佈。

(a) 現進行調查以估計 μ 。

(i) 隨機選出 16 個家庭組成一樣本，並記錄他們在該月的用水量（以 m^3 為單位）如下：

17 17 18 19 19 20 20 21 21 21 22 23 23 23 24 24

求 μ 的 95% 置信區間。

(ii) 求最小樣本容量使得 μ 的 99.5% 置信區間的寬度小於 3。

(7分)

(b) 假定 $\mu = 20$ 。若某家庭在該月的用水量介乎 $18 m^3$ 與 $23 m^3$ 之間，則視該家庭為一般。

(i) 求 H 城中一般家庭所佔的百分數。

(ii) 現隨機逐一選出 H 城中的家庭，並記錄他們在該月的用水量。當發現 3 個一般家庭時，便停止記錄。已知在這記錄過程中選出多於 6 個家庭，求恰好 9 個家庭其用水量均被記錄的概率。

(6分)

(a). (i) 樣本平均值:

$$(17 \times 2 + 18 + 19 \times 2 + 20 \times 2 + 21 \times 3 + 22 + 23 \times 3 + 24 \times 2) \div 16$$

$$= 20.75$$

$$\therefore (20.75 - 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}}, 20.75 + 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}})$$

$$\therefore (18.79, 22.71)$$

(ii) 設樣本容量為 n .

$$\therefore 2 \times 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} < 3.$$

$$3\sqrt{n} > 2 \times 2.58 \times 4$$

$$n > 56.1500$$

$\therefore n$ 為正整數 $\therefore n$ 最小為 57

\therefore 最小樣本容量為 57 使 μ 的 99.5% 置信區間寬度小於 3.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$(b) P(1 \leq X \leq 2)$$

$$= P\left(\frac{18-20}{4} < Z < \frac{23-20}{4}\right)$$

$$= P(-0.5 < Z < 0.75)$$

$$= 0.1915 + 0.2734$$

$$= 0.4649.$$

$$(ii) P(\text{恰好有 } 1 \text{ 個家庭}) =$$

$$\binom{6}{2} \times 0.4649^2 \times (1-0.4649)^{6-2} + \binom{6}{1} \times 0.4649 \times (1-0.4649)^{6-1}$$

$$= 0. + (1-0.4649)^6 = 0.411645255 \approx 0.4116.$$

$$P(\text{恰好有 } 9 \text{ 個家庭}) =$$

$$\binom{6}{2} \times 0.4649^2 \times (1-0.4649)^{6-2} \times \binom{3}{1} \times 0.4649 \times (1-0.4649)^{3-1}$$

$$+ \binom{6}{1} \times 0.4649 \times (1-0.4649)^{6-1} \times \binom{2}{2} \times 0.4649^2 \times (1-0.4649)^{2-2}$$

$$\binom{6}{2} \times 0.4649^2 \times (1-0.4649)^{6-2} \times 0.4649 \times (1-0.4649)^{3-1}$$

$$+ \binom{6}{1} \times 0.4649 \times (1-0.4649)^{6-1} \times \binom{2}{1} \times 0.4649^2 \times (1-0.4649)^{2-1}$$

$$+ (1-0.4649)^6 \times 0.4649^3 = 0.066045978$$

或

$$\therefore \frac{P(\text{恰好有 } 9 \text{ 個家庭})}{P(\text{恰好有 } 1 \text{ 個家庭})} =$$

$$\frac{0.066045978}{0.411645255} = 0.160443919$$

$$\approx 0.1604$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 一鋼鐵廠有 P 及 Q 兩機器生產鋼鐵。兩機器同時開始生產。該廠經理分別用下式模擬 P 及 Q 的鋼鐵產量的變率（以每月千噸為單位）：

$$p(t) = 2t \ln(t^2 + 4) \text{ 及 } q(t) = \frac{4 \ln(2e^t + 1)}{e^{-t} + 2} \quad (0 \leq t \leq 4),$$

其中 t 為自開始生產鋼鐵起計所經過的月數。將 P 在首 4 個月內的總鋼鐵產量記為 α 千噸。設 α_1 為利用梯形法則將區間分成 4 個子區間對 α 的估計。

(a) (i) 求 α_1 。

(ii) 估計值 α_1 是過高還是過低？試解釋你的答案。

(6分)

(b) 設 β 千噸為 Q 在首 4 個月內的總鋼鐵產量。

(i) 利用代換 $u = \ln(2e^t + 1)$ ，求 β 。

(ii) 經理宣稱 Q 在首 4 個月內的總鋼鐵產量超過 P 與 Q 在首 4 個月內的總鋼鐵產量之和的 30%。你是否同意？試解釋你的答案。

(6分)

(a) (i) $\frac{4}{4} = 1$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \times [0 + 2 \times 4 \ln(4^2 + 4) + 2 \times (2 \times 1) \ln(1^2 + 4) + 2 \times 2 \times \ln(2^2 + 4) + 2 \times 3 \ln(3^2 + 4)]$$

$$= \frac{1}{2} \times [8 \ln 20 + 2 \times (2 \ln 5 + 4 \ln 8 + 6 \ln 13)]$$

$$= 38.90926723$$

$$\approx 38.9093$$

(ii) $p'(t) = 2 \ln(t^2 + 4) + 2t \times \frac{2t}{t^2 + 4}$

$$\because t > 0 \quad \therefore p'(t) > 0$$

\therefore 向上

$\therefore \alpha$ 過高。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$(b) (i) \frac{dn}{dt} = \frac{re^t}{re^t + 1} \quad \therefore dt = \frac{dn}{re^t(2e^t + 1)} \quad q(t) = \frac{e^t(4)\ln(2e^t + 1)}{1 + 2e^t}$$

$$\beta \approx \int_0^{\infty} q(t) dt$$

$$= \int_{\ln 3}^{\ln(re^t + 1)} \frac{4}{v} n dn$$

$$= [n^2]_{\ln 3}^{\ln(re^t + 1)}$$

$$= [\ln(re^t + 1)]^2 - [\ln 3]^2$$

$$= 20.90433138$$

$$\approx 20.9043$$

$$(ii) \therefore \frac{20.90433138}{20.90433138 + 38.90926725} \times 100\% \approx 34.9491\%$$

$$> 30\%$$

\therefore 此估計高

1. 該比例比 34.9491% 大
實際值

1. 同類。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



A large rectangular area with horizontal ruling lines, intended for writing answers.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 某缸載着一些水。該缸現有水滲漏。設 $V \text{ m}^3$ 為該缸內水的體積。已知

$$V = \frac{64}{he^{kt} + 4},$$

其中 $t (\geq 0)$ 為自滲漏開始起計所經過的時數，且 h 及 k 均為常數。

(a) 將 $\ln\left(\frac{64}{V} - 4\right)$ 表為 t 的線性函數。 (1分)

(b) 已知在 (a) 中所得的線性函數的圖像通過原點及點 $(2, 1)$ 。求

(i) h 及 k ，

(ii) $\frac{dV}{dt}$ ，

(iii) 當 $\frac{dV}{dt}$ 達至其最小值時 V 的值。

(8分)

(c) 該缸的物主得知 $S = V^{\frac{2}{3}}$ ，其中 $S \text{ m}^2$ 為該缸被浸濕的總表面面積。

(i) 求當 $\frac{dV}{dt}$ 達至其最小值時 $\frac{dS}{dt}$ 的值。

(ii) 該物主宣稱當 $\frac{dV}{dt}$ 達至其最小值時， $\frac{dS}{dt}$ 達至其最小值。該宣稱是否正確？試解釋你的答案。

(4分)

(a) $\ln\left(\frac{64}{V} - 4\right)$

$$= \ln\left(\frac{64}{he^{kt} + 4} - 4\right)$$

$$= \ln he^{kt} = \ln h + kt$$

(b)

∴ 過 $(0, 0)$ 和 $(2, 1)$ 點

$$\therefore \begin{cases} \ln h = 0 & h = 1 \\ 2k + \ln h = 1 & k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$(vii) V = \frac{64}{e^{\frac{t}{2}} + 4}$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{-e^{\frac{t}{2}} \times (\frac{1}{2}) \times 64}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^2} = \frac{-32e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^2}$$

$$(iii) \frac{d^2V}{dt^2} = \frac{-32e^{\frac{t}{2}} \times (\frac{1}{2}) \times (e^{\frac{t}{2}} + 4)^2 + 32e^{\frac{t}{2}} \times 2(e^{\frac{t}{2}} + 4) \times e^{\frac{t}{2}} \times \frac{1}{2}}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^4}$$

$$= \frac{-16e^{\frac{t}{2}}(e^{\frac{t}{2}} + 4)^2 + 32e^t(e^{\frac{t}{2}} + 4)}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^4} = \frac{-16e^{\frac{t}{2}}(e^{\frac{t}{2}} + 4) + 32e^t}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^3}$$

$$= \frac{-16e^t - 64e^{\frac{t}{2}} + 32e^t}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^3} = \frac{16e^t - 64e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^3}$$

$$\because e^t > 0 \quad \therefore e^{\frac{t}{2}} = 4 \quad t = 2 \ln 4 = 4 \ln 2 \text{ 时 } \frac{d^2V}{dt^2} = 0.$$

$$\therefore t < 4 \ln 2 = 4 \ln 2 > 4 \ln 2$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} < 0 \quad = 0 \quad > 0.$$

$\therefore t = 4 \ln 2$ 时 $\frac{dV}{dt}$ 以最小值

$$\text{此时 } V = \frac{64}{e^{2 \ln 2} + 4} = \frac{64}{4 + 4} = 8$$

$$(iv) \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dV} \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{2}{3} \times V^{-\frac{1}{3}} \times \frac{-32e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^2}$$

$\therefore \frac{dV}{dt}$ 以最小值时

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \times 8^{-\frac{1}{3}} \times \frac{-32 \cdot e^{2 \ln 2}}{(e^{2 \ln 2} + 4)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{-128 \times 4}{(4 + 4)^2} = \frac{1}{3} \times (-1) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

$$(v) \frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \times V^{-\frac{1}{3}} \times \frac{-32e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{64}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)} \times \frac{-32e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^2}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{128}{3(e^{\frac{t}{2}} + 4)} \times \frac{-32e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^2} \right) + \frac{128}{3(e^{\frac{t}{2}} + 4)} \times \frac{d^2V}{dt^2}$$

$$= \frac{128}{3} \times \frac{-(e^{\frac{t}{2}} + 4) \times \frac{1}{2} \times \frac{-32e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} + 4)^2} + \frac{128 \times 16(e^t - 4e^{\frac{t}{2}})}{3(e^{\frac{t}{2}} + 4)^3}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$= \frac{128 \times 16}{9} \times \frac{1}{|e^{\frac{t}{2}} + 4|^3} \times \left[\frac{e^{\frac{t}{2}} + 4e^{\frac{t}{2}} + 1e^{\frac{t}{2}} - 4e^{\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + 4} \right]$$

$$\therefore e^{\frac{t}{2}} + 4e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{3t}{2}} + 4e^{\frac{t}{2}} - 4e^{\frac{t}{2}} - 16e^{\frac{t}{2}} = 0 \text{ 时}$$

$$|e^{\frac{t}{2}}|^2 + e^{\frac{t}{2}} - 16 = 0.$$

$$(e^{\frac{t}{2}} + 4)(e^{\frac{t}{2}} - 4) = 0.$$

$$e^{\frac{t}{2}} = -4 \text{ (舍)} \text{ 或 } e^{\frac{t}{2}} = 4 \Rightarrow t = 2 \ln 4$$

$$\therefore t < 2 \ln 4 \quad \frac{ds}{dt} < 0 \quad t = 2 \ln 4 \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad t > 2 \ln 4 \quad \frac{ds}{dt} > 0.$$

∴ $t = 2 \ln 4$ 时 $\frac{ds}{dt}$ 取小

∴ 该空称不正确。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

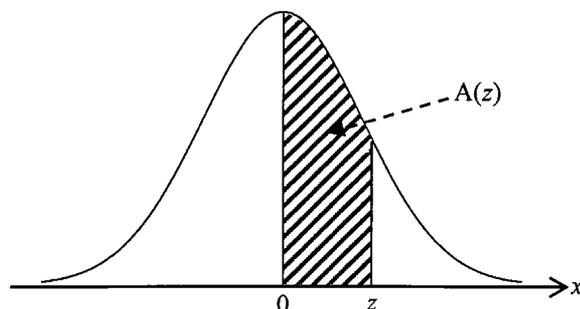
- 試卷完 -

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註：本表所列數字為標準正態曲線下由 $x=0$ 至 $x=z$ ($z \geq 0$) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

評語

考生在第 1、3、4、5、6 及 10 題表現甚佳，顯示其對這些題目涉及的概念有深入的認識和理解。

考生能在第 5、9(c) 及 10 題不熟悉的廣闊情境中，成功並巧妙地運用課程中的微積分與統計概念，顯示其對這些概念有深入的認識和理解。

此外，考生能精準而邏輯地運用數學語言、符號和圖像作出溝通、表達意念及作為論據，例如第 1、3、4、5、6、9 及 10 題。

再者，考生在第 5、9 及 10(b) 題複雜的情境中，成功地建構數學模型，使用適當的策略完整地解題，並在有需要時評論結果的重要性和合理性。

總括而言，考生在處理複雜的課業時，能運用多樣化的策略整合課程中不同領域的知識和技能。