香 港 考 試 及 評 核 局

2 0 1 8 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

數學 延伸部分

單元二（代數與微積分）

試題答題簿

本試卷必須用中文作答

兩小時三十分鐘完卷

（上午八時三十分至上午十一時）

請在此貼上電腦條碼

考生編號									

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、 3、 5、 7、 9、 11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$	$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$	$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$	$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$	$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$	
$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$	

****

甲部（50 分）

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

1. 設 $f(x)=(x^2-1)e^x$ 。以 h 表 $f(1+h)$ 。由此，從基本原理求 $f'(1)$ 。 (4 分)

$f(x)=(x^2-1)e^x$

$f(1+h)=[(1+h)^2-1]e^{1+h}$

$=(1+2h+h^2-1)e^{1+h}$

$=(2h+h^2)e^{1+h}$

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f(1+h)-f(1)]$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[(2h+h^2)e^{1+h}-(1^2-1)e^1]$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}(2h+h^2)e^{1+h}$

$=\lim_{h\to0}(2+h)e^{1+h}$

$=(2+0)e^{1+0}$

$=2e^1$

$=2e$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 展開 $(x+3)^5$ 。由此，求 $(x+3)^5\left(x-\frac{4}{x}\right)^2$ 的展開式中 x^3 的係數。 (5 分)

$$(x+3)^5 = x^5 + 5x^4\cdot 3 + 10x^3\cdot 3^2 + 10x^2\cdot 3^3 + 5x\cdot 3^4 + 3^5$$
$$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$$

$$\left(x-\frac{4}{x}\right)^2 = x^2 + 2(x)\left(-\frac{4}{x}\right) + \left(-\frac{4}{x}\right)^2$$
$$= x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}$$

$\therefore x^3$ 的係數 $= 405 \times 1 + 90 \times (-8) + 1 \times 16$
$= -299.$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 若 $\cot A = 3\cot B$ ，證明 $\sin(A+B) = 2\sin(B-A)$ 。

(b) 利用 (a)，解方程 $\cot\left(x+\frac{4\pi}{9}\right) = 3\cot\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)$ ，其中 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 。

(5 分)

(a) $\cot A = 3\cot B$

$\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{3\cos B}{\sin B}$

$\cos A \sin B = 3\sin A\cos B$

$\sin B\cos A = \frac{3}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$.

$\frac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(B-A)) = \frac{3}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$

$\frac{1}{2}\sin(A+B)+\frac{1}{2}\sin(B-A) = \frac{3}{2}\sin(A+B)+\frac{3}{2}\sin(A-B)$

$-\sin(A+B) = \frac{3}{2}\sin(A-B)-\frac{1}{2}\sin(B-A)$

$-\sin(A+B) = -\frac{3}{2}\sin(B-A)-\frac{1}{2}\sin(B-A)$

$-\sin(A+B) = -2\sin(B-A)$

$\sin(A+B) = 2\sin(B-A)$.

(b) $\cot(x+\frac{4\pi}{9}) = 3\cot(x+\frac{5\pi}{18})$.

$\sin(x+\frac{4\pi}{9}+x+\frac{5\pi}{18}) = 2\sin(x+\frac{5\pi}{18}-x-\frac{4\pi}{9})$

$\sin(2x+\frac{13\pi}{18}) = 2\sin(-\frac{1}{6}\pi)$

$\sin(2x+\frac{13\pi}{18}) = -1$

$2x+\frac{13\pi}{18} = \frac{3\pi}{2}$ 或 $2x+\frac{13\pi}{18} = \frac{7\pi}{2}$

$2x = \frac{7\pi}{9}$ 或 $2x = \frac{25\pi}{9}$

$x = \frac{7\pi}{18}$. 或 $x = \frac{25\pi}{18}$ (捨去).

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. (a) 利用分部積分法，求 $\int u(5^u)\,\mathrm{d}u$ 。

(b) 對所有實數 x ， 定義 $\mathrm{f}(x)=x(5^{2x})$ 。 求 $y=\mathrm{f}(x)$ 的圖像、 直線 $x=1$ 與 x 軸圍成的區域的面積。

(6 分)

(a). $\int u(5^u)du = \int 5^u d(\frac{1}{2}u^2)$

$= \frac{1}{2}(5^u)u^2 - \int \frac{1}{2}u^2 d(5^u).$

設 $y=5^x$, $\ln y = \ln 5^x = x\ln 5$

$d(\ln y) = \ln 5\, dx.$

$\frac{1}{y} dy = \ln 5\, dx.$

$\frac{dy}{dx} = y\ln 5 = 5^x \ln 5.$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 利用代換積分法，求 $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ 。

(0,2)

(b) 在曲線 Γ 上的任意點 (x, y) ， Γ 的切線的斜率為 $15x^3\sqrt{1+x^2}$ 。 Γ 的 y 截距為 2 。 求 Γ 的方程。

(7 分)

~~設 $x=\tan\theta$，則 $dx=\sec^2\theta d\theta$.~~

~~$\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$~~

~~$=\int \tan^3\theta\sqrt{1+\sec^2\theta}\,d\theta$.~~

(a) 設 $u=1+x^2$，則 $du=2x\,dx$.

$\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\int(u-1)\sqrt{u}\,du$

$=\frac{1}{2}\int u\sqrt{u}\,du-\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du$

$=\frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du-\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ (C為常數).

(b). $\frac{dy}{dx}=15x^3\sqrt{1+x^2}$

$\therefore y=\int 15x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

$=15\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

$=15\left[\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C\right]$

$=3(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-5(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C_1$ ($C_1=15C$).

代入 $x=0$ 及 $y=2$

$2=3(1+0)^{\frac{5}{2}}-5(1+0)^{\frac{3}{2}}+C_1$

$2=3-5+C_1$

$C_1=4$

$\therefore$ Γ 的方程是

$y=3(1+x^2)^{\frac{5}{3}}-5(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+4$.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n， $\sum_{k=1}^{n} k(k+4)=\frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$ 。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=333}^{555}\left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right)$ 。

(7 分)

(a) 設S(n)為命題

$\sum_{k=1}^{n} k(k+4)=\frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$

其中n是正整數

當n=1時

左方 $=\sum_{k=1}^{1} k(k+4)=1(1+4)=5$

右方 $=\frac{1(1+1)(2\times1+13)}{6}=\frac{2\times15}{6}=5$

∵左方=右方

∴S(1)成立

假設S(t)對於某正整數t成立

即 $\sum_{k=1}^{t} k(k+4)=\frac{t(t+1)(2t+13)}{6}$

當n=t+1時，

左方 $=\sum_{k=1}^{t+1} k(k+4)$

$=\sum_{k=1}^{t} k(k+4)+(t+1)(t+1+4)$

$=\frac{t(t+1)(2t+13)}{6}+(t+1)(t+5)$

$=\frac{t+1}{6}(t(2t+13)+6(t+5))$.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$=\frac{t+1}{6}(2t^2+13t+6t+30)$$

$$=\frac{t+1}{6}(2t^2+19t+30)$$

$$=\frac{(t+1)(t+2)(2t+15)}{6}$$

$$=\frac{(t+1)[(t+1)+1][2(t+1)+13]}{6}$$

=右方

∴若S(t)成立則S(t+1)成立
根據數學歸納法的原理，
S(n)對於所有正整數n成立。

(b) $\sum_{k=333}^{555}\left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right)=\frac{1}{24976}\sum_{k=333}^{555}k(k+4)$

$$=\frac{1}{24976}\left[\sum_{k=1}^{555}k(k+4)-\sum_{k=1}^{332}k(k+4)\right]$$

$$=\frac{1}{24976}\left(\frac{555(556)(1123)}{6}-\frac{332(333)(679)}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{24976}(57755890-12511254)$$

$$=\frac{45244636}{24976}=\frac{11311159}{6244}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

續 後 頁

7. 定義 $M=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ 。設 $X=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}$ 為一非零的實矩陣使得 $MX=XM$ 。

(a) 以 a 表 b 及 c。

(b) 證明 X 為一非奇異矩陣。

(c) 將 X 的轉置矩陣記為 X^T 。以 a 表 $(X^T)^{-1}$ 。

(8 分)

(a). $MX=XM$

$$\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7a+3b & 42a+3c\\ -a+5b & -6a+5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7a-6a & 3a+30a\\ 7b-c & 3b+5c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7a+3b & 42a+3c\\ -a+5b & -6a+5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 33a\\ 7b-c & 3b+5c\end{pmatrix}$$

$\therefore 7a+3b=a$ 及 $42a+3c=33a$

$6a=-3b$ 及 $9a=-3c$

$b=-2a$ 及 $c=-3a$

(b). $X=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 6a\\ -2a & -3a\end{pmatrix}$

$$\det(X)=\begin{vmatrix}a & 6a\\ -2a & -3a\end{vmatrix}=-3a^2+12a^2$$
$$=9a^2$$

$\because$ X是非零實矩陣, $a\neq 0$

$\therefore \det(X)=9a^2\neq 0$

$\therefore$ X為一非奇異矩陣.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(c) $X = \begin{pmatrix} a & 6a \\ -2a & -3a \end{pmatrix}$

$X^T = \begin{pmatrix} a & -2a \\ 6a & -3a \end{pmatrix}$

$\det(X^T) = \det(X) = 9a^2$

$(X^T)^{-1} = \frac{1}{9a^2}\begin{pmatrix} -3a & 2a \\ -6a & a \end{pmatrix}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 對所有實數 x， 定義 $f(x)=\dfrac{A}{x^2-4x+7}$ ，其中 A 為一常數。 已知 $f(x)$ 的極值為 4。

(a) 求 $f'(x)$。

(b) 某人宣稱 $y=f(x)$ 的圖像有至少兩漸近線。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(c) 求 $y=f(x)$ 的圖像的拐點。

(8 分)

(a)、 $f(x)=\dfrac{A}{x^2-4x+7}$

$f'(x)=\dfrac{(x^2-4x+7)(0)-A(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}$

$=\dfrac{-A(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}$

考慮，$f'(x)=0$

$\dfrac{-A(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}=0$

$x=2$

$\because$ 極值 $=4$

$\therefore f(2)=4$

$\dfrac{A}{2^2-4\times2+7}=4$

$A=4\times(4-8+7)=12$

$\therefore f'(x)=\dfrac{-12(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}$

(b)、 考慮，$x^2-4x+7=0$ 的 Δ

$\Delta=(-4)^2-4(1)(7)=-12<0$.

$\therefore$ 對於所有實數 x，$x^2-4x+7\neq0$

$\therefore$ 沒有垂直漸近線

留意，分子多項式次數比分母的次數小，

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

∴沒有斜漸近線
∴水平漸近線：$y=0$

∴只有一條漸近線，不同意的宣稱。

(c). $f''(x)=\dfrac{(x^2-4x+7)^2(-12)(2)-(-12)(2x-4)\cdot 2(x^2-4x+7)(2x-4)}{(x^2-4x+7)^4}$

$=\dfrac{-24(x^2-4x+7)+24(2x-4)^2}{(x^2-4x+7)^3}$

$=\dfrac{-24x^2+96x-168+96x^2-384x+384}{(x^2-4x+7)^3}$

$=\dfrac{72x^2-288x+216}{(x^2-4x+7)^3}$

$=\dfrac{72(x^2-4x+3)}{(x^2-4x+7)^3}$

考慮的 $f''(x)=0$

$\dfrac{72(x^2-4x+3)}{(x^2-4x+7)^3}=0$

$x=3$ 或 $x=1$

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	⤴	3	⤵	3	⤴

∴拐點是 $(1,3)$ 和 $(3,3)$.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

9. 考慮曲線 $C: y=\ln\sqrt{x}$ ， 其中 $x>1$ 。 設 P 為 C 上的一動點。 C 在 P 的法線與 x 軸相交於點 Q ， 而通過 P 的垂直線與 x 軸相交於點 R 。

(a) 將 P 的 x 坐標記為 r 。 證明 Q 的 x 坐標為 $\dfrac{4r^2+\ln r}{4r}$ 。 (3 分)

(b) 求 ΔPQR 的最大面積。 (5 分)

(c) 設 O 為原點。 已知 OP 以不超過每分鐘 $32e^2$ 單位的速率增加。 某人宣稱當 P 的 x 坐標為 e 時， ΔPQR 的面積以低於每分鐘 2 平方單位的速率增加。 該宣稱是否正確？ 解釋你的答案。 (4 分)

(a). $P=(r, \ln\sqrt{r})$.

$y=\ln\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x}$.

C在P的切線斜率$=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=r}=\frac{1}{2r}$

$\therefore C$在P的法線斜率$=-2r$.

法線方程: $\frac{y-\ln\sqrt{r}}{x-r}=-2r$

$y-\ln\sqrt{r}=-2rx+2r^2$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. (a) (i) 證明 $\int \sin^4 x\, dx = \frac{-\cos x \sin^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx$ 。

(ii) 計算 $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$ 。

(5 分)

(b) (i) 設 $f(x)$ 為一連續函數使得對所有實數 x ， $f(\beta - x) = f(x)$ ， 其中 β 為一常數。 證明 $\int_0^{\beta} x f(x)\, dx = \frac{\beta}{2}\int_0^{\beta} f(x)\, dx$ 。

(ii) 計算 $\int_0^{\pi} x \sin^4 x\, dx$ 。

(5 分)

(c) 考慮曲線 $G: y = \sqrt{x}\sin^2 x$ ， 其中 $\pi \le x \le 2\pi$ 。 設 R 為 G 與 x 軸圍成的區域。求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。 (3 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(a)(i). $\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\frac{1}{2}(1-\cos 2x))^2 dx.$

(ii). $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$

$= [-\frac{\cos x \sin^3 x}{4}]_0^{\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx.$

$= \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx$

$= \frac{3}{8}\int_0^{\pi} dx - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2x\, d(2x)$

$= \frac{3}{8}[x]_0^{\pi} - \frac{3}{16}[\sin 2x]_0^{\pi}$

$= \frac{3}{8}\pi.$

(b)(i) 設 $u = \beta - x$，則 $du = -dx$

當 $x = 0$ 時，$u = \beta$ 及當 $x = \beta$ 時，$u = 0$

$\int_0^{\beta} x f(x)\, dx = \int_{\beta}^{0} (\beta - u) f(\beta - u)(-du)$

$= \int_0^{\beta} (\beta - u) f(\beta - u)\, du$

$= \int_0^\beta \beta f(\beta-u)\,du - \int_0^\beta u f(\beta-u)\,du$

$= \beta \int_0^\beta f(\beta-x)\,dx - \int_0^\beta x f(\beta-x)\,dx$

$= \beta \int_0^\beta f(x)\,dx - \int_0^\beta x f(x)\,dx$

$\therefore 2\int_0^\beta x f(x)\,dx = \beta \int_0^\beta f(x)\,dx$

$\int_0^\beta x f(x)\,dx = \frac{\beta}{2}\int_0^\beta f(x)\,dx$.

(ii). $\int_0^\pi x\sin^4 x\,dx$

當 $\beta=\pi$ 時，設 $f(x) = \sin^4 x$

$f(\pi-x) = \sin^4(\pi-x) = \sin^4 x = f(x)$

$\therefore \int_0^\pi x\sin^4 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^4 x\,dx$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{8}\pi$

$= \frac{3}{16}\pi^2$

(c). 代入 $y=0$ 至 G

$0 = \sqrt{x}\sin^2 x$

$\sqrt{x}=0$ 或 $\sin^2 x = 0$

$x=0$ (捨去) 或 $x=\pi$ 或 $x=2\pi$

$\therefore$ 所求體積 $= \pi\int_\pi^{2\pi} [\sqrt{x}\sin^2 x]^2\,dx$.

$= \pi\int_0^\pi x\sin^4 x\,dx$

($y=\sqrt{x}\sin^2 x$ 為週期函數).

$= \frac{3}{16}\pi^2\cdot\pi = \frac{3}{16}\pi^3$ 立方單位

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases} x + ay + 4(a+1)z = 18 \\ 2x + (a-1)y + 2(a-1)z = 20 \\ x - y - 12z = b \end{cases}$$ ，其中 $a, b \in \mathbf{R}$ 。

(i) 假設 (E) 有唯一解。

(1) 求 a 值的範圍。

(2) 解 (E) 。

(ii) 假設 $a=3$ 且 (E) 有解。

(1) 求 b 。

(2) 解 (E) 。

(9 分)

(b) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(F):\begin{cases} x + 3y + 16z = 18 \\ x + y + 2z = 10 \\ x - y - 12z = s \\ 2x - 5y - 45z = t \end{cases}$$ ，其中 $s, t \in \mathbf{R}$ 。

假設 (F) 有解。求 s 及 t 。 (3 分)

(a)(i)(1)

設 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & 4(a+1) \\ 2 & a-1 & 2(a-1) \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix}$

(E) 有唯一解 $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 4(a+1) \\ 2 & a-1 & 2(a-1) \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow -12(a-1)+2a(a-1)-8(a+1)-4(a-1)(a+1)$
$+24a+2(a-1) \neq 0$

$\Leftrightarrow -12a+12+2a^2-2a-8a-8-4a^2+4$
$+24a+2a-2 \neq 0$

$\Leftrightarrow -2a^2+4a+6 \neq 0.$

$\Leftrightarrow -2(a+1)(a-3) \neq 0.$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$\Leftrightarrow a \neq -1$ 及 $a \neq 3$

∴ a 值的範圍是所有實數，除了 $a=-1$ 和 $a=3$

(2)

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}18 & a & 4(a+1)\\ 20 & a-1 & 2(a-1)\\ b & -1 & -12\end{vmatrix}}{-2(a+1)(a-3)}=\frac{\overset{240a+36a-36}{-216a+216+2a^2b-2ab-80a-80-4a^2b+4b}}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$=\frac{-2a^2b-17a-2ab+4b+100}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 18 & 4(a+1)\\ 2 & 20 & 2(a-1)\\ 1 & b & -12\end{vmatrix}}{-2(a+1)(a-3)}=\frac{\overset{+2b+432}{-240+36a-36+8ab+8b-80a-80-2ab}}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$=\frac{-44a+6ab+10b+76}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 18\\ 2 & a-1 & 20\\ 1 & -1 & b\end{vmatrix}}{-2(a+1)(a-3)}=\frac{ab-b+20a-36-18a+18+20-2ab}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$=\frac{2a-ab-b+2}{-2(a+1)(a-3)}$$

∴ 解為 $\begin{cases} x=\dfrac{-2a^2b-17a-2ab+4b+100}{-2(a+1)(a-3)}\\ y=\dfrac{-22a+3ab+5b+38}{-a(a+1)(a-3)}\\ z=\dfrac{-2a-ab-b+2}{-2(a+1)(a-3)}\end{cases}$

(ii)(1) 代入 $a=3$ 至 (E) 使 (E) 的增廣矩陣為

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 16 & 18\\ 2 & 2 & 4 & 20\\ 1 & -1 & -12 & b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 16 & 18\\ 0 & -4 & -28 & -16\\ 0 & -4 & -28 & b-18\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 16 & 18\\ 0 & -4 & -28 & -16\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{pmatrix}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(E)有解 $\Leftrightarrow b-2=0$

$\Leftrightarrow b=2$

(2) 代入 $b=2$ 使(E)改寫成

$$\begin{cases} x+3y+16z=18 & —① \\ -4y-28z=-16 & —② \\ 0=0 & —③ \end{cases}$$

②: $-4y-28z=-16$

$-4y=-16+28z$

$y=4-7z$ —④

代入④至①

$x+3(4-7z)+16z=18$

$x=18-12+21z-16z$

$x=6+5z$

設 $z=w$，則 $y=4-7w$ 及 $x=6+5w$，其中 $w\in\mathbb{R}$

∴解為 $\begin{cases} x=6+5w \\ y=4-7w \\ z=w \end{cases}$，其中 $w\in\mathbb{R}$

(b) (F): $\begin{cases} x+3y+11z=18 \\ x+y+2z=10 \\ x-y-12z=5 \\ 2x-5y-45z=t \end{cases} \sim \begin{cases} x+3y+11z=18 & —⑤ \\ 2x+2y+4z=20 & —⑥ \\ x-y-12z=5 & —⑦ \\ 2x-5y-4z=t & —⑧. \end{cases}$

留意，⑤、⑥和⑦為代入 $a=3$ 及 $b=2$ 後(a)問的解。

即 $s=2$，及解為 $\begin{cases} x=6+5w \\ y=4-7w \\ z=w \end{cases}$，其中 $w\in\mathbb{R}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

把解代入⑧

$2(6+5w)-5(4-7w)-4w=t$

$12+10w-20+35w-4w=t$

$-8+41w=t$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 點 A、點 B、點 C 及點 D 的位置向量分別為 $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$、$-\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$、$7\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ 及 $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$。將包含 A、B 及 C 的平面記為 Π。設 E 為 D 在 Π 上的投影。

(a) 求

(i) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，

(ii) 四面體 $ABCD$ 的體積，

(iii) $\overrightarrow{DE}$。

(5 分)

(b) 設 F 為 BC 上的一點使得 DF 垂直於 BC。

(i) 求 $\overrightarrow{DF}$。

(ii) $\overrightarrow{BC}$ 是否垂直於 $\overrightarrow{EF}$？解釋你的答案。

(5 分)

(c) 求 ΔBCD 與 Π 間的交角。 (3 分)

(a)(i). $\vec{AB}=-5\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$

$\vec{AC}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&6&-4\\3&2&4\end{vmatrix}=32\vec{i}+8\vec{j}-28\vec{k}$$

(ii) $\vec{AD}=-\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$

四面體ABCD體積 $=|\vec{AD}\cdot(\vec{AB}\times\vec{AC})|\times\frac{1}{6}$

$=|(-1)(32)+(1)(8)+(-6)(-28)|\frac{1}{6}$

$=144\div6$

$=24$ 立方單位

(iii). $\triangle ABC$面積$\times\frac{1}{3}\times DE=24$

$\frac{1}{2}\sqrt{32^2+8^2+(-28)^2}\cdot DE=72$

$\sqrt{1872}\ DE=144$

$12\sqrt{13}DE=144$

$DE=\frac{12}{\sqrt{13}}$ 單位

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \sqrt{32^2+8^2+(-28)^2} = 12\sqrt{13}$

∴ 垂直於 Π 的單位向量 $= \frac{8}{3\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{3\sqrt{13}}\vec{j} - \frac{7}{3\sqrt{13}}\vec{k}$

$\vec{DE} = \frac{12}{\sqrt{13}}\left(\frac{8}{3\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{3\sqrt{13}}\vec{j} - \frac{7}{3\sqrt{13}}\vec{k}\right)$

$= \frac{32}{13}\vec{i} + \frac{8}{13}\vec{j} - \frac{28}{13}\vec{k}$

(b)(i) $\vec{BF} = t\vec{BC}$

$\vec{BC} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$

∴ $\vec{BF} = 8t\vec{i} - 4t\vec{j} + 8t\vec{k}$.

$\vec{BD} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{DF} = (8t-4)\vec{i} + (-4t+5)\vec{j} + (8t+2)\vec{k}$.

∵ $DF \perp BC$

∴ $\vec{DF}\cdot\vec{BC} = 0$

$(8t-4)(8) + (-4t+5)(-4) + (8)(8t+2) = 0$

$64t - 32 + 16t - 20 + 64t + 16 = 0$

$144t = 36$

$t = \frac{1}{4}$

∴ $\vec{DF} = \left(\frac{8}{4} - 4\right)\vec{i} + \left(-\frac{4}{4} + 5\right)\vec{j} + \left(\frac{8}{4} + 2\right)\vec{k}$

$= -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$

(ii) $\vec{EF} = \vec{DF} - \vec{DE}$

$= -\frac{58}{13}\vec{i} + \frac{44}{13}\vec{j} + \frac{80}{13}\vec{k}$

$\vec{BC}\cdot\vec{EF} = 8\left(-\frac{58}{13}\right) + (-4)\left(\frac{44}{13}\right) + (8)\left(\frac{80}{13}\right) = 0$

∴ $BC \perp EF$.

(c). 由(b)，DF⊥BC 且 EF⊥BC
∴ 所求夾角 = $\angle DFE$.

$$|DE| = \sqrt{\left(\frac{32}{13}\right)^2+\left(\frac{8}{13}\right)^2+\left(-\frac{28}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{1872}}{13} = \frac{12}{13}\sqrt{13}.$$

$$|DF| = \sqrt{(-2)^2+4^2+4^2} = 6.$$

$$|EF| = \sqrt{\left(-\frac{58}{13}\right)^2+\left(\frac{44}{13}\right)^2+\left(\frac{80}{13}\right)^2} = \frac{30}{13}\sqrt{13}$$

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2(DF)(EF)\cos\angle DFE$$

$$\frac{144}{13} = 36 + \frac{900}{13} - 2\times 36\times\frac{900}{13}\cos\angle DFE$$

$$-\frac{1224}{13} = -72\times\frac{900}{13}\cos\angle DFE$$

$$\cos\angle DFE = \frac{17}{900}$$

$$\angle DFE = \cos^{-1}\frac{17}{900}$$

－ 試卷完 －

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

評語

考生在第 9 至 12 題等不熟悉的廣闊情境和在第 1 至 8 題等熟悉的情境中，成功並巧妙地運用課程中的代數與微積分概念，顯示其對這些概念有深入的認識和理解。

考生亦能精準而邏輯地運用數學語言和符號作出溝通、表達意念及作為論據，例如在第 1 題中懂得從基本原理求得導數；在第 3 題，能完成證明並求得正確解；在第 5 題，懂得用適當的積分代換計算題中的不定積分及定積分；在第 8 題，能應用商法則和 $f(x)$ 的極值求得 $f'(x)$ 的正確答案，並得出 $y=f(x)$ 的圖像的水平漸近線和拐點。

另外，考生能以邏輯、嚴謹和精要的方式成功地為第 9、10 及 12 題提供部分複雜的數學證明。

總括而言，考生能於處理複雜的課業時，運用多樣化的策略整合課程中不同領域的知識和技能。