2018-DSE
數學 延伸部分
單元二

香 港 考 試 及 評 核 局

2 0 1 8 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

請在此貼上電腦條碼

考生編號									

數學　延伸部分

單元二（代數與微積分）

試題答題簿

本試卷必須用中文作答

兩小時三十分鐘完卷

（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、 3、 5、 7、 9、 11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

****

甲部（50 分）

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

1. 設 $f(x) = (x^2 - 1)e^x$ 。以 h 表 $f(1+h)$ 。由此，從基本原理求 $f'(1)$ 。 (4 分)

$f(1+h) = ((1+h)^2 - 1)e^{(1+h)}$

$= (1+2h+h^2-1)e^{(1+h)}$

$= 2h \cdot e^{1+h} + h^2 \cdot e^{1+h}$

$= he^{1+h}(2+h)$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h+1) - f(h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{he^{1+h}(2+h) - (h^2-1)e^h}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{1+h}(2h+h^2) - (h^2-1)e^h}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{e^h \cdot (e(2h+h^2) - (h^2-1))}{h}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 展開 $(x+3)^5$ 。由此，求 $(x+3)^5\left(x-\frac{4}{x}\right)^2$ 的展開式中 x^3 的係數。 (5 分)

$(x+3)^5$

$= x^5+5x^4(3)+10(x)^3(3)^2+10(x)^2(3)^3+5(x)(3)^4+1(3)^5$

$= x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$

$\cancel{(x+3)^5\left(x-\frac{4}{x}\right)^2}$

$\left(x-\frac{4}{x}\right)^2$

$= x^2-2(x)\left(\frac{4}{x}\right)+\frac{16}{x^2}$

$= x^2-8+\frac{16}{x^2}$

$405x(x^2)+(-8)(90x^3)+\left(\frac{16}{x^2}\right)(x^5)$

$= 405x^3-720x^3+16x^3$

$= -299x^3$

$\therefore x^3$ 的係數是 -299。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 若 $\cot A = 3\cot B$ ，證明 $\sin(A+B) = 2\sin(B-A)$ 。

(b) 利用 (a)，解方程 $\cot\left(x+\frac{4\pi}{9}\right) = 3\cot\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)$ ，其中 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 。

(5 分)

~~(a)~~

$\cancel{\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{3\cos B}{\sin B}}$

$\cancel{\cos A \sin B = 3\cos B \sin A}$

(a) $\sin A.\cos B + \cos A \sin B$

$=$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4.✓ (a) 利用分部積分法，求 $\int u(5^u)\,du$ 。

(b) 對所有實數 x ， 定義 $f(x)=x(5^{2x})$ 。 求 $y=f(x)$ 的圖像、直線 $x=1$ 與 x 軸圍成的區域的面積。

(6 分)

~~4a)~~ $\cancel{\frac{u^2}{2}5^u - \int \frac{u^2}{2}\,d(5^u)}$

~~(4a)~~ $\cancel{\int u(5^u)\,du}$

$\cancel{= \frac{u^2}{2}5^u - \int \frac{u^2}{2}a^u \ln a\,du}$

$\cancel{=}$

4a) $\int u5^u\,du$

$= \frac{5^u}{\ln 5}u - \int \frac{5^u}{\ln 5}\,du$

$= \frac{5^u}{\ln 5}u - \frac{1}{\ln 5}\int 5^u\,du$

$= \frac{5^u}{\ln 5}u - \frac{1}{\ln 5}\left(\frac{5^u}{\ln 5}\right)$

$= \frac{u5^u}{\ln 5} - \frac{5^u}{(\ln 5)^2} + C$ //

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx$

$= \int_0^1 x\,5^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 2x\,5^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x)5^{2x}}{\ln 5} - \frac{5^{(2x)}}{(\ln 5)^2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\cdot 5^2}{\ln 5} - \frac{5^2}{(\ln 5)^2}\right.$

$= \frac{50\ln 5 - 25}{2(\ln 5)^2}$ //

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 利用代換積分法，求 $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ 。

(b) 在曲線 Γ 上的任意點 (x, y) ， Γ 的切線的斜率為 $15x^3\sqrt{1+x^2}$ 。 Γ 的 y 截距為 2。 求 Γ 的方程。

(7 分)

(a) 設 $1+x^2 = u$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$\frac{1}{2}\int (u-1)\sqrt{u}\,du$

$= \frac{1}{2}\int u\sqrt{u} - \sqrt{u}\,du$

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$

$= \frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$ //

(b) $\int 15x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

$= 15\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

$= 15\left(\frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$

$7 = 3(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - 5(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

$2 = 3(1)^{\frac{5}{2}} - 5(1)^{\frac{3}{2}} + C$

$4 = C$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

~~$\therefore$ Γ 的方程為~~

$\Gamma = 3(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - 5(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + 4$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，$\sum_{k=1}^{n} k(k+4)=\frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$ 。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=333}^{555}\left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right)$ 。

(7 分)

(a) 設 P(n) 為 $\sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$

假設 P(1) 成立

左方 $= \sum_{k=1}^{1} k(k+4)$　　右方 $= \frac{1(1+1)(2(1)+13)}{6}$

$= 1(1+4)$　　$= 5$

$= 5$

∴ ~~左~~ 左方 = 右方

∴ P(1) 成立

假設對於 A 為正整數，P(A) $= \sum_{k=1}^{A} k(k+4) = \frac{A(A+1)(2A+13)}{6}$ 正確，

左方: $P(A+1) = \sum_{k=1}^{A+1} k(k+4)$

$= \sum_{k=1}^{A} (k)(k+4) + (A+1)((A+1)+4)$

$= \frac{A(A+1)(2A+13)}{6} + (A+1)(A+5)$

$= \frac{(A+1)(2A^2+13A+6A+30)}{6}$

$= \frac{(A+1)(2A^2+19A+30)}{6}$

$= \frac{(A+1)(A+2)(2A+15)}{6}$

= 右方

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

∴ 對於所有正整數 n，

$P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$ 都是成立。

6b. $\sum_{k=333}^{555} \left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right)$

$= \left(\frac{1}{24976}\right)\sum_{k=333}^{555} (k)(k+4)$

$= \left(\frac{1}{24976}\right)\left(\sum_{k=1}^{555} (k)(k+4) - \sum_{k=1}^{332} (k)(k+4)\right)$

$= \frac{1}{24976}\left(\left(\frac{555(556)(1123)}{6}\right) - \frac{(332)(333)(677)}{6}\right)$

$= \frac{1}{24976}(45281488)$

$= 1813$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 定義 $M=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ 。設 $X=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}$ 為一非零的實矩陣使得 $MX=XM$ 。

(a) 以 a 表 b 及 c。

(b) 證明 X 為一非奇異矩陣。

(c) 將 X 的轉置矩陣記為 X^T 。以 a 表 $(X^T)^{-1}$ 。

(8 分)

(7a) $\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}7a+3b & 42a+3c\\ -a+5b & -6a+5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7a-6a & 3a+30a\\ 7b-c & 3b+5c\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}7a+3b & 42a+3c\\ -a+5b & -6a+5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 33a\\ 7b-c & 3b+5c\end{pmatrix}$

$7a+3b=a$ $\quad$ $42a+3c=33a$

$3b=-6a$ $\quad$ $9a=-3c$

$b=-2a$ $\quad$ $c=-3a$

$\therefore\ b=-2a$

$c=-3a$

(b) $\begin{vmatrix}a & 6a\\ -2a & -3a\end{vmatrix}$

$=-3a^2-(6a)(-2a)$

$=-3a^2+12a^2$

$=9a^2$

$a^2>0$ ($\because$ X 為一非零的實矩陣，$\therefore\ a\neq 0$)

$\therefore\ 9a^2>0$

$\therefore$ X 為一非奇異矩陣.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(c)

$$(X^T)^{-1}$$

$$= (X^{-1})^T$$

$$= \left[\left(\frac{1}{9a^2}\right)\begin{pmatrix} -3a & -6a \\ 2a & a \end{pmatrix}\right]^T$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3a} & -\frac{2}{3a} \\ \frac{2}{9a} & \frac{1}{9a} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3a} & \frac{2}{9a} \\ -\frac{2}{3a} & \frac{1}{9a} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3a}\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 對所有實數 x， 定義 $f(x)=\dfrac{A}{x^2-4x+7}$ ，其中 A 為一常數。已知 $f(x)$ 的極值為 4。 ① ②

(a) 求 $f'(x)$。

(b) 某人宣稱 $y=f(x)$ 的圖像有至少兩漸近線。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(c) 求 $y=f(x)$ 的圖像的拐點。 $\frac{d^2y}{dx^2}$

(8 分)

(8a) $f'(x) = A(x^2-4x+7)^{-1}$

$= A(-1)(x^2-4x+7)^{-2}(2x-4)$

$= \dfrac{(-A)(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}$

$= \dfrac{-2Ax+4A}{(x^2-4x+7)^2}$

(b) 由於 $(x^2-4x+7)^2$

$((x-2)^2+3)^2$

$\because (x-2)^2+3>0$

$\therefore ((x-2)^2+3)^2>0$

$\therefore$ $y=f(x)$ 中 沒有垂直漸近線。

而因 水平漸近線和斜漸近線並不能同時存在。因此，$y=f(x)$ 的圖像中最多只有 1 條漸近線。

因此，我不同意。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(c)

$$\frac{-2Ax+4A}{(x^2-4x+7)^2}=0$$

$$-2Ax+4A=0$$
$$4A=2Ax$$
$$x=2$$

$$4=\frac{A}{(2)^2-4(2)+7}$$

$$A=12$$

$$f(x)=\frac{12}{x^2-4x+7}$$

$$f'(x)=\frac{-24x+48}{(x^2-4x+7)^2}$$

$$f''(x)=(-24x+48)(x^2-4x+7)^{-2}$$

$$=(-24x+48)(-2)(x^2-4x+7)^{-3}(2x-4)+(x^2-4x+7)^{-2}(-24)$$

$$=\frac{(48x-96)(2x-4)}{(x^2-4x+7)^3}+\frac{(-24)}{(x^2-4x+7)^2}$$

$$=\frac{(96x^2-192x-192x+384)+(-24)(x^2-4x+7)}{(x^2-4x+7)^3}$$

$$=\frac{96x^2-384x+384-24x^2+96x-168}{(x^2-4x+7)^3}$$

$$=\frac{72x^2-288x+216}{(x^2-4x+7)^3}$$

$f''(x)=0$, $72x^2-288x+216=0$

$x=3$ 或 $x=1$

∴ $y=f(x)$ 圖像的拐點為 $(3,3)$ 和 $(1,3)$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50分）

9. 考慮曲線 $C: y=\ln\sqrt{x}$ ， 其中 $x>1$ 。 設 P 為 C 上的一動點。 C 在 P 的法線與 x 軸相交於點 Q ， 而通過 P 的垂直線與 x 軸相交於點 R 。

(a) 將 P 的 x 坐標記為 r 。 證明 Q 的 x 坐標為 $\frac{4r^2+\ln r}{4r}$ 。 (3分)

(b) 求 ΔPQR 的最大面積。 (5分)

(c) 設 O 為原點。 已知 OP 以不超過每分鐘 $32e^2$ 單位的速率增加。 某人宣稱當 P 的 x 坐標為 e 時， ΔPQR 的面積以低於每分鐘 2 平方單位的速率增加。 該宣稱是否正確？ 解釋你的答案。 (4分)

(9a) $\cancel{\frac{dy}{dx} = \ln(x)^{\frac{1}{2}}}$

$y = \ln(x)^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}\ln x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}$ $\quad\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=r} : \frac{1}{2r}$

$= \frac{1}{2x}$,,

P的法線方程為， $y-\ln\sqrt{r} = (-2r)(x-r)$

$y-\ln\sqrt{r} = -2rx+2r^2$

$y = -2rx+2r^2+\ln\sqrt{r}$

~~設~~ ~~Q的~~ 設 Q的座標為 $(k,0)$

$0 = -2r(k)+2r^2+\ln\sqrt{r}$

$2r(k) = 2r^2+\ln\sqrt{r}$

$k = \frac{\cancel{4}r^2+\ln\sqrt{r}}{\cancel{4}r}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. (a) (i) 證明 $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{-\cos x \sin^3 x}{4} + \dfrac{3}{4}\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 。

(ii) 計算 $\int_0^{\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x$ 。

(5 分)

(b) (i) 設 $\mathrm{f}(x)$ 為一連續函數使得對所有實數 x ， $\mathrm{f}(\beta - x) = \mathrm{f}(x)$ ， 其中 β 為一常數。 證明 $\int_0^{\beta} x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\beta}{2}\int_0^{\beta} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 。

(ii) 計算 $\int_0^{\pi} x \sin^4 x\,\mathrm{d}x$ 。

(5 分)

(c) 考慮曲線 G: $y = \sqrt{x}\sin^2 x$ ， 其中 $\pi \le x \le 2\pi$ 。 設 R 為 G 與 x 軸圍成的區域。求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。 (3 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10ai) $\int \sin^4 x \, d(x)$

$= -\int \sin^3 x \, d(\cos x)$

$= -(\cos x \sin^3 x - \int \cos x \, 3\sin^2 x \cos x \, dx$

$= -(\cos x \sin^3 x - \int \cos^2 x \, 3\sin^2 x \, dx)$

$= -(\cos x \sin^3 x - \int \frac{3}{4}(\sin 2x)^2 \, dx)$

$= -(\cos x \sin^3 x - \frac{3}{4}\int \sin^2 2x \, dx)$

$=$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(a)(ii) $\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$

$= \left[\frac{-\cos x \sin^3 x}{4}\right]_0^{\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$

$= 0 + \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$

$= \frac{3}{4}\left(\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\right)$

$= \frac{3}{4}\left(\left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x)\right)$

$= \frac{3}{4}\left[\left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}\right]$

$= \frac{3}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

$= \frac{3\pi}{8}$

(b)(i) $\int_0^{\beta} x f(x)\,dx$

設 $x = \beta - u$ $\quad \frac{dx}{du} = -1$

當 $x = \beta$, $u = 0$

$x = 0$, $u = \beta$

$\int_0^{\beta} x f(x)\,dx = \int_{\beta}^{0} (\beta - u) f(\beta - u)(-du)$

$\int_0^{\beta} x f(x)\,dx = \int_0^{\beta} \beta(f(\beta - u) - u f(\beta - u))\,du$

$\int_0^{\beta} x f(x)\,dx = \int_0^{\beta} \beta(f(\beta - x)) - x f(\beta - x)\,dx$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\int_0^\beta x f(x)\,dx = \int_0^\beta \beta f(\beta - x)\,dx - \int_0^\beta x f(\beta - x)\,dx$$

$$\int_0^\beta x f(x)\,dx = \int_0^\beta \beta f(\beta - x)\,dx - \int_0^\beta x f(x)\,dx$$

$$\int_0^\beta x f(x)\,dx = \frac{\beta}{2}\int_0^\beta f(x)\,dx$$ //

(b)(ii) $\int_0^\pi x \sin^4 x\,dx$

$f(x) = \sin^4 x\,dx$, $\beta = \pi$

$\because$ $\sin^4(\pi - x) = \sin^4 x$.

$\therefore$ 根據 (b)(i)

$$\int_0^\pi x \sin^4 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^4 x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{3(\pi)^2}{16}$$ //

(c) $\pi\int_\pi^{2\pi} y^2 \; dx$

$$\pi\int_\pi^{2\pi} x\sin^4 x\,dx$$

$$= \pi\left(\int_0^{2\pi} x\sin^4 x\,dx - \int_0^\pi x\sin^4 x\,dx\right)$$

$$= \pi\left(\frac{2\pi}{2}\int_0^{2\pi} \sin^4 x\,dx - \frac{3(\pi)^2}{16}\right)$$

$$= \pi\left(\cancel{2\pi}\ \pi\left(\left(\left[\frac{-\cos x \sin^3 x}{4}\right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx\right) - \frac{3(\pi)^2}{16}\right)\right.$$

$$= \pi\left(\pi\left(0 + \left[\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi}\right) - \frac{3(\pi)^2}{16}\right)$$

$$= \pi\left(\pi\left(\pi - 0\right) - \frac{3(\pi)^2}{16}\right)$$

$$= \pi^3 - \frac{3\pi^3}{16}$$

$$= \frac{13\pi^3}{16}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} x + ay + 4(a+1)z = 18 \\ 2x + (a-1)y + 2(a-1)z = 20 \\ x - y - 12z = b \end{cases}$$ ，其中 $a, b \in \mathbf{R}$ 。

(i) 假設 (E) 有唯一解。

(1) 求 a 值的範圍。

(2) 解 (E) 。

(ii) 假設 $a=3$ 且 (E) 有解。

(1) 求 b 。

(2) 解 (E) 。

(9 分)

(b) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$a=3$

$$(F): \begin{cases} x + 3y + 16z = 18 \\ x + y + 2z = 10 \div 2 \\ x - y - 12z = s \\ 2x - 5y - 45z = t \end{cases}$$ ，其中 $s, t \in \mathbf{R}$ 。

假設 (F) 有解。求 s 及 t 。 (3 分)

(i)(a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 4a+4 \\ 2 & a-1 & 2a-2 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} \neq 0$

$-(2a^2-4a-6) \neq 0$

$-2a^2+4a+6 \neq 0$

$a \neq -1 \quad a \neq 3$

a i)(2) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 18 & a & 4a+4 \\ 20 & a-1 & 2a-2 \\ b & -1 & -12 \end{vmatrix}}{-2a^2+4a+6}$

$= \dfrac{18\begin{vmatrix} a-1 & 2a-2 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 20 & 2a-2 \\ b & -12 \end{vmatrix} + (4a+4)\begin{vmatrix} 20 & a-1 \\ b & -1 \end{vmatrix}}{-2a^2+4a+6}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$x=\frac{18(-12a+12+2a-2)-a(-240-26a+26)+(4a+4)(-20-ba+1)}{-2a^2+4a+6}$$

$-4ab+4a+4$

$$=\frac{\cancel{-216a}-180a+180+240a+26a^2-2ab-80a-80-4a^2b}{-2a^2+4a+6}$$

$$=\frac{-16a+26a^2-6ab+104-4a^2b}{-2a^2+4a+6}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 18 & 4a+4\\ 2 & 20 & 2a-2\\ 1 & b & -12\end{vmatrix}}{-2a^2+4a+6}$$

$$=\frac{1\begin{vmatrix}20 & 2a-2\\ b & -12\end{vmatrix}-18\begin{vmatrix}2 & 2a-2\\ 1 & -12\end{vmatrix}+(4a+4)\begin{vmatrix}2 & 20\\ 1 & b\end{vmatrix}}{-2a^2+4a+6}$$

$$=\frac{-240-2ab+2b+432+36a-36+(4a+4)(2b-20)}{-2a^2+4a+6}$$

$$=\frac{-240-2ab+2b+432+36a-36+8ab+8b-80a-80}{-2a^2+4a+6}$$

$$=\frac{76+6ab+10b-44a}{-2a^2+4a+6}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 18\\ 2 & a-1 & 20\\ 1 & -1 & b\end{vmatrix}}{-2a^2+4a+6}$$

$$=\frac{(ba-b+20)-a(2b-20)+18(-2-a+1)}{-2a^2+4a+6}$$

$$=\frac{ba-b+20-2ab+20a+18(-1-a)}{-2a^2+4a+6}$$

$$=\frac{-ab-b+2+2a}{-2a^2+4a+6}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

1(a)(i) i

$$\begin{cases} x+3y+16z=18 & \text{—— (1)} \\ 2x+2y+4z=20 & \text{—— (2)} \\ x-y-12z=b & \text{—— (3)} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 2 & 2 & 4 & 20 \\ 1 & -1 & -12 & b \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 2 & 2 & 4 & 20 \\ 0 & -4 & -28 & \end{array}\right)$$

(1) − (3) : $4y+28z=18-b$ —— (4)

2×(1) − (2) : $4y+28z=16$. —— (5)

~~(4) − (5) :~~

$0=(18-b)-16)$

$0=2-b$

$b=2$

a(i)(2) 設 $z=t$.

$4y+28t=16$

$y=\dfrac{16-28t}{4}$

$y=4-7t$

$x+12-21t+16t=18$

$-5t=6$

$x=6+5t$

∴ 解是 $\{(6+5t,4-7t,t): t\in\mathbb{R}\}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b) $2(6+5t)-5(4-7t)-45t=t$

$12+10t-20+35t-45t=t$

$-8=t$

$\cancel{s=20}$

$s=24$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 點 A、點 B、點 C 及點 D 的位置向量分別為 $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$、$-\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$、$7\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ 及 $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$。將包含 A、B 及 C 的平面記為 Π。設 E 為 D 在 Π 上的投影。

(a) 求

(i) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，

(ii) 四面體 $ABCD$ 的體積，

(iii) $\overrightarrow{DE}$。

(5 分)

(b) 設 F 為 BC 上的一點使得 DF 垂直於 BC。

(i) 求 $\overrightarrow{DF}$。

(ii) $\overrightarrow{BC}$ 是否垂直於 $\overrightarrow{EF}$？解釋你的答案。

(5 分)

(c) 求 ΔBCD 與 Π 間的交角。 (3 分)

(a) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\times(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})$

$=((-4i+3j-k)+(-i+3j-3k))\times(-4i+3j-k+7i-j+5k)$

$=(-5i+6j-4k)\times(3i+2j+4k)$

$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 6 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

$=i(32)-j(-28)+k(-28)$

$=32i+28j-28k$

(aii) $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$=((-4i+3j-k)+3i-2j-5k)\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$= (-i + j - 6k) \cdot (32i + 28j - 28k)$

$= 164$

(iii) ~~AEK~~

$|\overrightarrow{AD}|^2$

$\cancel{= (-i + j - 6k)}$

$= 2$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。