第四級單元二
附評語之示例

2018-DSE
數學 延伸部分
單元二

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 1 8 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

請在此貼上電腦條碼

考生編號									

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、 3、 5、 7、 9、 11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

****

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

甲部（50 分）

1. 設 $f(x)=(x^2-1)e^x$ 。 以 h 表 $f(1+h)$ 。 由此，從基本原理求 $f'(1)$ 。 (4 分)

$f(1+h) = [(1+h)^2-1]e^{1+h}$

$= (1+2h+h^2-1)e^{1+h}$

$= (2h+h^2)e^{1+h}$

$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[(2h+h^2)e^{1+h} - (1^2-1)e^1)$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+2)e^{1+h} - 0}{\cancel{h}}$

$= \lim_{h\to 0} (h+2)e^{1+h}$

$= 2e$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 展開 $(x+3)^5$ 。由此，求 $(x+3)^5\left(x-\frac{4}{x}\right)^2$ 的展開式中 x^3 的係數。 (5 分)

$(x+3)^5 = x^5 + 5(x)^4(3) + 10x^3(3)^2 + 10x^2(3)^3 + 5x(3)^4 + 3^5$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

$(x-\frac{4}{x})^2 = x^2 + 2(x)(-\frac{4}{x}) + (-\frac{4}{x})^2$

$= x^2 - 8 + \frac{16}{x^2}$

所求 x^2 的係數 $= 243(1) + 270(-8) + 15(16)$

$= -1677$ //

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 若 $\cot A = 3\cot B$ ，證明 $\sin(A+B) = 2\sin(B-A)$ 。

(b) 利用 (a)，解方程 $\cot\left(x+\frac{4\pi}{9}\right) = 3\cot\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)$ ，其中 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 。

(5 分)

(a) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\cot A = 3\cot B$

$\frac{\cos A}{\sin A} = 3\frac{\cos B}{\sin B}$

$\cos A\sin B = 3\sin A\cos B$

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + 3\sin A\cos B$

$= 2[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$

$= 2(\sin B\cos A - \cos B\sin A)$

$= 2\sin(B-A)$

(b) $\cot\left(x+\frac{4\pi}{9}\right) = 3\cot\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)$

$\cancel{\frac{\cos\left(x+\frac{4\pi}{9}\right)}{\sin\left(x+\frac{4\pi}{9}\right)} = 3\frac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)}{\sin\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)}}$

$\cancel{\frac{\cos\left(x+\frac{4\pi}{9}\right)}{2\sin\left(\frac{4\pi}{9}-x\right)} = 3\frac{\cos\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)}{2\sin\left(\frac{5\pi}{18}-x\right)}}$

$\therefore A = \left(x+\frac{4\pi}{9}\right)$

$B = \left(x+\frac{5\pi}{18}\right)$

$\sin\left(x+\frac{4\pi}{9}+x+\frac{5\pi}{18}\right) = 2\left(\sin\left(x+\frac{5\pi}{18}-x-\frac{4\pi}{9}\right)\right)$

$\sin\left(2x+\frac{13\pi}{18}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\left(2x+\frac{13\pi}{18}\right) = -1$

$2x+\frac{13\pi}{18} = -\pi$

$x = \frac{-\pi-\frac{13\pi}{18}}{2}$

$x = -\frac{14}{15}\pi$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. (a) 利用分部積分法，求 $\int u(5^u)\,du$ 。

(b) 對所有實數 x， 定義 $f(x)=x(5^{2x})$ 。 求 $y=f(x)$ 的圖像、 直線 $x=1$ 與 x 軸圍成的區域的面積。

(6 分)

a. $\int u(5^u)du = \int u \cdot e^{u\ln 5}\,du$

$= \frac{1}{2}u^2 \cdot e^{u\ln 5} - \int \frac{1}{2}u^2 \cdot \cancel{u}\ln 5\, e^{u\ln 5}du$

$= \frac{1}{2}u^2 \cdot 5^u - \frac{1}{2}\int u\ln 5 \cdot 5^u du + C$

$(1+\frac{1}{2}\ln 5)\int u(5^u)du = \frac{1}{2}u^2 \cdot 5^u + C_1$

$\int u(5^u)du = \frac{u^2 \cdot 5^u}{2(1+\frac{1}{2}\ln 5)} + C_1$ (C_1 & C_2 都是常數)

b. $f(x) = x(5^{2x}) = \frac{1}{2}(2x)(5^{2x})$

當 $x=1$, $f(x) = 25$.

當 $f(x)=0$, $x(5^{2x})=0$

$x=0$

所求面積 $= \int_0^1 \frac{1}{2}(2x)(5^{2x})$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x)^2 \cdot 5^{2x}}{2(1+\frac{1}{2}\ln 5)}\right]_0^1$

$= \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 25}{2(1+\frac{1}{2}\ln 5)}$

$= \frac{25}{2(1+\frac{1}{2}\ln 5)}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 利用代換積分法，求 $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 。

(b) 在曲線 Γ 上的任意點 (x, y) ， Γ 的切線的斜率為 $15x^3\sqrt{1+x^2}$ 。 Γ 的 y 截距為 2。求 Γ 的方程。

(7 分)

(a) 設 $\cancel{x=\tan\theta \,,\ dx=\sec^2\theta d\theta}$.

$$\cancel{\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \tan^2\theta\cdot\sqrt{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\sec^2\theta}}$$

$$\cancel{= \int \tan^2\theta\cdot\sec\theta\cdot\frac{d\theta}{\sec^2\theta}}$$

$$\cancel{= \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\, d\theta}$$

$$\cancel{= \int \sin\theta\tan^2\theta\, d\theta}$$

$$=$$

設 $u=1+x^2$, $du = 2x\,dx$

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$ （C 为常数）

b. Γ 方程为 $y = 15\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

$$y = 3(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - 5(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$\therefore$ Γ 的 y 轴截距为 2

$\therefore$ Γ 方程为 $y = 3(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - 5(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + 2$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，$\sum_{k=1}^{n} k(k+4)=\frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=333}^{555}\left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right)$。

(7 分)

(a) 設 $S(n)$ 为命題

「$\sum_{k=1}^{n} k(k+4)=\frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$」

当 $n=1$，左方 $=1(1+4)=5$

右方 $=\frac{1(1+1)(2(1)+13)}{6}=5=$ 左方

$\therefore$ $S(1)$ 成立，

假設对於某正整數 A，$S(A)$ 成立，

則「$\sum_{k=1}^{A} k(k+4)=\frac{A(A+1)(2A+13)}{6}$」

当 $n=A+1$ 时，左方 $=\sum_{k=1}^{A+1} k(k+4)$

$=\sum_{k=1}^{A} k(k+4)+(A+1)(A+1+4)$

$=\frac{A(A+1)(2A+13)}{6}+(A+1)(A+5)$

$=\frac{A(A+1)(2A+13)+6(A+1)(A+5)}{6}$

$=\frac{(A+1)(2A^2+13A+6A+30)}{6}$

$=\frac{(A+1)(A+2)(2(A+1)+13)}{6}$

$=$ 右方.

$\therefore$ 若 $S(A)$ 成立，$S(A+1)$ 也成立。

$\therefore$ 根據數学歸納法的原理，~~$S(A+1)$ 也成~~

$S(n)$ 对於所有正整數 n 都成立.

b. ~~考慮 $n=555$.~~

~~$\sum_{k=1}^{555}\left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right) = \frac{555(555+1)(2(555)+1)}{6} \div \frac{1}{112} \div \frac{1}{223}$~~

~~$\neq 2310$~~

~~考慮 $n=332$~~

$$\sum_{k=333}^{555}\left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right) = \left[\sum_{k=1}^{555} k(k+4) - \sum_{k=1}^{332}(k)(k+4)\right] \div 112 \div 223$$

$$= 10878$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 定義 $M=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ 。設 $X=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}$ 為一非零的實矩陣使得 $MX=XM$ 。

(a) 以 a 表 b 及 c。

(b) 證明 X 為一非奇異矩陣。

(c) 將 X 的轉置矩陣記為 X^T 。以 a 表 $(X^T)^{-1}$ 。

(8 分)

(a)

$$MX = XM$$

$$\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7a+3b & 42a+3c\\ -a+5b & -6a+5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7a-6a & 3a+30a\\ 7b-c & 3b+5c\end{pmatrix}$$

对比元素可得： $7a+3b=7a-6a$

$3b=-6a$

$\underline{b=-2a}$

$42a+3c=3a+30a$

$3c=-9a$

$\underline{c=-3a}$.

b. $\det(X)=\begin{vmatrix}a & 6a\\ b & c\end{vmatrix}=ac-6ab$

$=a(-3a)-6a(-2a)$

$=-3a^2+12a^2$

$=9a^2$

若 $a=0$，则 X 为零矩陣.

$\therefore$ $a\neq 0$ 依题意，X 为一非零矩陣.

$\therefore$ $\det(X)\neq 0$

$\therefore$ X 为一非奇異矩陣.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

c. $X^T = \begin{pmatrix} a & b \\ 6a & c \end{pmatrix}$

$\det(X^T) = ac - 6ab$

$= 5a^2$

$(X^T)^{-1} = \dfrac{1}{\det(X^T)} \begin{pmatrix} c & -6a \\ -b & a \end{pmatrix}^T$

$= \dfrac{1}{5a^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -6a & a \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{5a^2} \begin{pmatrix} -3a & 2a \\ -6a & a \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5a} & \dfrac{2}{5a} \\ -\dfrac{6}{5a} & \dfrac{1}{5a} \end{pmatrix}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 對所有實數 x， 定義 $f(x)=\frac{A}{x^2-4x+7}$ ， 其中 A 為一常數。 已知 $f(x)$ 的極值為 4。

(a) 求 $f'(x)$。

(b) 某人宣稱 $y=f(x)$ 的圖像有至少兩漸近線。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(c) 求 $y=f(x)$ 的圖像的拐點。

(8 分)

(a) ∵ ~~f(x) 極值 = 4.~~

$f(x) = \frac{A}{x^2-4x+7}$

$= \frac{A}{(x-2)^2+3}$

∵ f(x) 極值 = 4.

∴ 当 $x=2$, $f(x)=4$.

$\frac{A}{(2-2)^2+3} = 4$

$A = 12$.

$f(x) = \frac{12}{(x-2)^2+3}$

$f'(x) = \frac{-12 \cdot 2(x-2)}{((x-2)^2+3)^2}$

$= \frac{-24(x-2)}{(x-2)^4+6(x-2)+9}$

(b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$.

∴ $x=2$ 是垂直漸近線.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{12}{7}$

∴ $y = \frac{12}{7}$ 是水平漸近线

∴ 有兩漸近线.

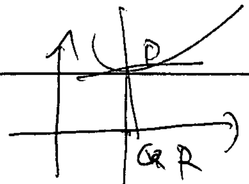
∴ 同意..

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



乙部（50 分）

9. 考慮曲線 $C: y=\ln\sqrt{x}$，其中 $x>1$。設 P 為 C 上的一動點。C 在 P 的法線與 x 軸相交於點 Q，而通過 P 的垂直線與 x 軸相交於點 R。

(a) 將 P 的 x 坐標記為 r。證明 Q 的 x 坐標為 $\dfrac{4r^2+\ln r}{4r}$。 (3 分)

(b) 求 ΔPQR 的最大面積。 (5 分)

(c) 設 O 為原點。已知 OP 以不超過每分鐘 $32e^2$ 單位的速率增加。某人宣稱當 P 的 x 坐標為 e 時，ΔPQR 的面積以低於每分鐘 2 平方單位的速率增加。該宣稱是否正確？解釋你的答案。 (4 分)

(a) $y=\ln\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=r} = \frac{1}{2r}$

C在P的法線斜率 $= -1 \div \frac{1}{2r}$

$= -2r$

把 $x=r$ 代入 C: $y=\ln\sqrt{r}$.

$\frac{\ln\sqrt{r}-0}{r-x} = -2r$

$\ln\sqrt{r} = 2r(r-x)$

$x = \frac{\ln\sqrt{r}}{2r}+r$

$x = \frac{\ln\sqrt{r}+2r^2}{2r}$

$x = \frac{\ln r+4r^2}{4r}$

(b) $R=(r,0)$

ΔPQR面積 $= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln r+4r^2}{4r}-r\right)\cdot\ln\sqrt{r}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln r}{4r}\cdot\ln\sqrt{r}$

$= \frac{\ln r\cdot\ln\sqrt{r}}{8r}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫 於 邊 界 以 外 的 答 案 ， 將 不 予 評 閱 。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

續後頁

10. (a) (i) 證明 $\int \sin^4 x\,dx = \dfrac{-\cos x \sin^3 x}{4} + \dfrac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$ 。

(ii) 計算 $\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$ 。

(5 分)

(b) (i) 設 $f(x)$ 為一連續函數使得對所有實數 x ， $f(\beta - x) = f(x)$ ， 其中 β 為一常數。 證明 $\int_0^{\beta} x\,f(x)\,dx = \dfrac{\beta}{2}\int_0^{\beta} f(x)\,dx$ 。

(ii) 計算 $\int_0^{\pi} x \sin^4 x\,dx$ 。

(5 分)

(c) 考慮曲線 G: $y = \sqrt{x}\sin^2 x$ ， 其中 $\pi \le x \le 2\pi$ 。 設 R 為 G 與 x 軸圍成的區域。求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。 (3 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(a i) $\int \sin^4 x\,dx = \int \sin^3 x\,d(-\cos x)$

$= -\cos x \sin^3 x + \int \cos x \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x\,dx$

$= -\cos x \sin^3 x + \int (1-\sin^2 x)\cdot 3\sin^2 x\,dx$

$= -\cos x \sin^3 x + \int 3\sin^2 x\,dx - 3\int \sin^4 x\,dx$

$4\int \sin^4 x\,dx = -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\,dx$

$\int \sin^4 x\,dx = -\dfrac{\cos x \sin^3 x}{4} + \dfrac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$

(ii) $\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx = \left[-\dfrac{\cos x \sin^3 x}{4}\right]_0^{\pi} + \dfrac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$

$= 0 + \dfrac{3}{4}\int_0^{\pi} \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$

$= \dfrac{3}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$

$= \dfrac{3}{8}\left[x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$

$= \dfrac{3}{8}(\pi - 0 - 0 + 0)$

$= \dfrac{3}{8}\pi$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(b i) $\int_0^\beta xf(x)dx = \int_0^\beta (\beta-x)f(\beta-x)d(\beta-x)$

$= \beta\int_0^\beta f(\beta-x)d(\beta-x) - \int_0^\beta x f(\beta-x)d(\beta-x)$

$= \beta\int_0^\beta f(x)dx - \int_0^\beta xf(x)dx$

$2\int_0^\beta xf(x)dx = \beta\int_0^\beta f(x)dx$

$\int_0^\beta xf(x)dx = \frac{\beta}{2}\int_0^\beta f(x)dx$

(ii) $\int_0^\pi x\sin^4 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^4 x\,dx$

$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{8}\pi\right)$

$= \frac{3}{16}\pi^2$

c. 所求体積 $= \pi\int_\pi^{2\pi}(\sqrt{x}\sin^2 x)^2 dx$

$= \pi\int_\pi^{2\pi} x\sin^4 x\,dx$

$= \pi\int_0^{2\pi} x\sin^4 x\,dx - \pi\int_0^\pi x\sin^4 x\,dx$

$= \pi\left[-\frac{\cos x\sin^3 x}{4} + \frac{3}{8}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{2} - \frac{3}{16}\pi^2\cdot\pi$

$= \frac{3}{16}\pi^3$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} x + ay + 4(a+1)z = 18 \\ 2x + (a-1)y + 2(a-1)z = 20 \\ x - y - 12z = b \end{cases}，其中 \ a,b\in\mathbf{R} 。$$

(i) 假設 (E) 有唯一解。

(1) 求 a 值的範圍。

(2) 解 (E)。

(ii) 假設 $a=3$ 且 (E) 有解。

(1) 求 b。

(2) 解 (E)。

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & 16 \\ \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{4} \\ 1 & -1 & -12 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 18 \\ \cancel{20}\ 10 \\ b \end{matrix}$$

(9 分)

(b) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$\begin{matrix} -2 & -14 & -8 \\ -4 & -28 & b-18 \end{matrix}$$

$$(F): \begin{cases} x + 3y + 16z = 18 \\ x + y + 2z = 10 \\ x - y - 12z = s \\ 2x - 5y - 45z = t \end{cases}，其中 \ s,t\in\mathbf{R} 。$$

假設 (F) 有解。求 s 及 t。 (3 分)

11 (a) i (1) $\det(E) = \begin{vmatrix} 1 & a & 4(a+1) \\ 2 & (a-1) & 2(a-1) \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix}$

$= -12(a-1) - 2(4)(a+1) + a(2)(a-1)$
$\quad - 4(a+1)(a-1) + 2(a-1) + 12(2)(a)$
$= -12a + 12 - 8a - 8 + 2a^2 - 2a$
$\quad -4a^2 + 4 + 2a - 2 + 24a.$
$= -2(a+1)(a-3)$

$\because (E)$ 有唯一解

$\therefore \det(E) \neq 0$

$-2(a+1)(a-3) \neq 0$

$a \neq -1$ 及 $a \neq +3$

值範圍 a 是 -1 和 3 以外實數

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(2)

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 18 & a & 4(a+1) \\ 20 & a-1 & 2(a-1) \\ b & -1 & -12 \end{vmatrix}}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$= \frac{18(-12)(a-1) - 20(4)(a+1) + ab(2)(a-1) - b(a-1)(4)(a+1) + 18(2)(a-1) + 12(20)a}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$= \frac{-216a+216 - 80a - 80 + 2a^2b - 2ab - 4a^2b + 4b + 36a - 36 + 240a}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$= \frac{-20a - 2a^2b + 100 - 2ab + 4b}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$= \frac{10a + a^2b - 50 + ab - 2b}{(a+1)(a-3)}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 18 & 4(a+1) \\ 2 & 20 & 2(a-1) \\ 1 & b & -12 \end{vmatrix}}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$= \frac{-240 + 8ab + 8b + 36a - 36 - 80a - 80 - 2ab + 2b + 432}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$= \frac{76 + 6ab + 10b - 44a}{-2(a+1)(a-3)}$$

$$= \frac{-38 - 3ab - 5b + 22a}{(a+1)(a-3)}$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 18 \\ 2 & a-1 & 20 \\ 1 & -1 & b \end{vmatrix}}{-2(a+1)(a-3)} = \frac{ab - b - 36 + 20 - 18a + 18 + 20 - 2ab}{-2(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{-ab - b + 22 - 18a}{-2(a+1)(a-1)}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$\therefore$ 方程的解
$$\begin{cases} x = \dfrac{10a + a^2b - 50 + ab + 4b}{(a+1)(a-3)} \\[2ex] y = \dfrac{-38 - 3ab - 5b + 22a}{(a+1)(a-3)} \\[2ex] z = \dfrac{-ab - b + 22 - 18a}{-2(a+1)(a-3)} \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(ii) 方程組的增廣矩陣為

$$(1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4(3+1) & 18 \\ 2 & 3-1 & 2(3-1) & 20 \\ 1 & -1 & -12 & b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 0 & -4 & -28 & -16 \\ 0 & -4 & -28 & -18+b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 0 & -1 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

$\because$ (E) 有解

$\therefore$ $b = 2$.

(iii) 可寫成
$$\begin{cases} x + 3y + 16z = 18 & —① \\ -y - 7z = -4 & —② \\ 0 = 0 & —③ \end{cases}$$

設 $z = t$, $-y - 7t = -4$

$y = 4 - 7t$

代 $y = 4 - 7t$, $z = t$ 入①

$x + 3(4 - 7t) + 16t = 18$

$x + 12 - 21t + 16t = 18$

$x = 6 + 5t$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\therefore \text{解} \begin{cases} x = 6+5t \\ y = 4-7t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

b. (F)的首三項與 $a=3$ 時(E)相同，$s=2$

$$\text{代} \begin{cases} x = 6+5\theta \\ y = 4-7\theta \\ z = \theta \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \text{ 入 } (F) \ \theta.$$

$$2(6+5\theta) - 5(4-7\theta) - 45(\theta) = t$$

$$12 + 10\theta - 20 + 35\theta - 45\theta = t$$

$$t = -8.$$

$\therefore s = 2$

$t = -8$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 點 A、點 B、點 C 及點 D 的位置向量分別為 $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$、$-\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$、$7\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ 及 $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$。將包含 A、B 及 C 的平面記為 Π。設 E 為 D 在 Π 上的投影。

(a) 求

(i) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，

(ii) 四面體 $ABCD$ 的體積，

(iii) $\overrightarrow{DE}$。

(5 分)

(b) 設 F 為 BC 上的一點使得 DF 垂直於 BC。

(i) 求 $\overrightarrow{DF}$。

(ii) $\overrightarrow{BC}$ 是否垂直於 $\overrightarrow{EF}$？解釋你的答案。

(5 分)

(c) 求 ΔBCD 與 Π 間的交角。 (3 分)

12 (a) i $\cancel{AB\times AC}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -5\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 6 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 32\vec{i} + 8\vec{j} - 28\vec{k}$$

ii $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = -\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$

$$\cancel{\vec{AB}\cdot\vec{AC}\times\vec{AD} = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -6 \end{vmatrix}}$$

$\cancel{=}$

所求體積 $= (32\vec{i} + 8\vec{j} - 28\vec{k})\cdot(-\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k})$

$= 32(-1) + 8(1) + (-28)(-6)$

$= \cancel{166}$ 144 立方單位

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

ΔABC面積 $= \sqrt{32^2 + 8^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{1748}$ 平方單位.

~~DE~~ $|\vec{DE}| = 144 \div \sqrt{1748}$

$$\vec{DE} = \frac{30\vec{i} + 8\vec{j} - 28\vec{k}}{\sqrt{1748}} \times \frac{146}{\sqrt{1748}}$$

b i ~~$\vec{DF}$~~

$\vec{DF} \perp BC$

~~$\vec{DF} \times \vec{BC} = 0$~~

$\vec{DF} \cdot \vec{BC} = 0$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

－ **試卷完** －

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

評語

考生在第 10(a) 題不熟悉的情境和在第 1、5(a)、6(a)、7(a) 及 8(a) 題等熟悉的情境中，成功運用課程中的代數與微積分概念，顯示考生對這些概念有紮實的認識和理解。

考生也能準確地運用數學語言和符號作出溝通、表達意念及作為論據，例如在第 1 題中能從基本原理求得導數；在第 5(a) 題，懂得利用適當的積分代換，正確計算題中的不定積分；在第 6(a) 題，嘗試利用數學歸納法證明命題；在第 7(a) 題，懂得利用矩陣的性質，進行淺易的運算；在第 8(a) 題，能應用鏈式法則和 $f(x)$ 的極值，求得 $f'(x)$ 的正確答案。

另外，考生在第 10(a) 題中能完成證明，並能正確計算題中的定積分。

總括而言，考生於處理多樣化的課業時，能整合課程中不同領域的知識和技能。