2018-DSE
數學 延伸部分
單元二

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 1 8 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

請在此貼上電腦條碼

考生編號									

數學　延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、 3、 5、 7、 9、 11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

****

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

甲部（50 分）

1. 設 $f(x) = (x^2-1)e^x$ 。 以 h 表 $f(1+h)$ 。 由此，從基本原理求 $f'(1)$ 。 (4 分)

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[[(\Delta x+x)^2-1]e^{\Delta x+x} - (x^2-1)e^x\right]\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\left[(\Delta x+x+1)(\Delta x+x-1)\right]e^{\Delta x+x} - (x+1)(x-1)e^x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\left[(\Delta x+x+1)(\Delta x+x-1)\right]e^{\Delta x}\cdot e^x - (x+1)(x-1)e^x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot e^x\left[(\Delta x+x+1)(\Delta x+x-1)\right]e^{\Delta x} - (x+1)(x-1)\Big]$$

$$\frac{d}{dx}f(1+h) = \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}\left[[(1+h)^2-1]e^{h+1} - (1-1)e^x\right]$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}\cdot(1+2h+h^2-1)$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\cdot h(2+h)\cdot \cancel{\frac{1}{h}e^{h+1}}$$

$$= 2$$

$$\therefore f'(1) = 2$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 展開 $(x+3)^5$ 。由此，求 $(x+3)^5\left(x-\dfrac{4}{x}\right)^2$ 的展開式中 x^3 的係數。 (5 分)

$(x+3)^5$

$= x^5+15x^4+90x^3+270x^2+\cancel{243}\,405x+243$

$\left(x-\dfrac{4}{x}\right)^2$

$= x^2-8+\dfrac{16}{x^2}$

x^3 的系数： $\cancel{405}$ $405\cdot 1+15\cdot 16-8\cdot 90$

$= -75$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 若 $\cot A = 3\cot B$ ，證明 $\sin(A+B) = 2\sin(B-A)$ 。

(b) 利用 (a)，解方程 $\cot\left(x+\frac{4\pi}{9}\right) = 3\cot\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)$ ，其中 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 。

(5 分)

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$2\sin(B-A) = 2\cdot(\sin B\cos A - \cos B\sin A)$

$\cot\left(x+\frac{4\pi}{9}\right) = 3\cot\left(x+\frac{5\pi}{18}\right)$

$\cot\left(x+\frac{4\pi}{9}\right) - 3\cot\left(x+\frac{5\pi}{18}\right) = 0$

$\cot\left(x+\frac{4\pi}{9} - 3x - \frac{5\pi}{6}\right) = 0$

$\cot\left(-2x - \frac{7\pi}{18}\right) = 0.$

$\cancel{2x}\ -2x - \frac{7\pi}{18} = \pi$

$-2x = \frac{25\pi}{18}$

$x = -\frac{25\pi}{36}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. (a) 利用分部積分法，求 $\int u(5^u)\,\mathrm{d}u$ 。

(b) 對所有實數 x， 定義 $\mathrm{f}(x)=x(5^{2x})$ 。 求 $y=\mathrm{f}(x)$ 的圖像、直線 $x=1$ 與 x 軸圍成的區域的面積。

(6 分)

a)

$$\cancel{\int u(5^u)du}$$
$$\cancel{=\frac{1}{5}\int u\,d(5^{u^2})}$$
$$\cancel{=\frac{1}{5}u\cdot 5^{u^2}}$$

$$\cancel{\int u(5^u)du}$$
$$\cancel{=\frac{1}{2}\int 5^u\,d(u^2)}$$
$$\cancel{=\frac{1}{2}u^2 5^u+\frac{1}{2}\int}$$

$$\cancel{\int u(5^u)du}$$
$$\cancel{=\frac{5}{2}\int u\,d(u^2)}$$
$$\cancel{=\frac{5}{2}u^2-\frac{5}{2}\int 5}$$

$$\int u(5^u)du$$
$$=5\int u\,d(5^{\frac{1}{2}u^2})$$
$$=5u^{\frac{1}{2}u^2}+\frac{1}{2}\int(5^u)\,d(u^2)$$
$$=5u^{\frac{1}{2}u^2}+\frac{1}{2}u^2 5^u+C$$

b) $f(x)=x(5^{2x})$

$$\int_0^1 x(5^{2x})\,dx$$

設 $u=x$, $du=dx$

$$\int_0^1 u(5^{2u})\,du$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 利用代換積分法，求 $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ 。

(b) 在曲線 Γ 上的任意點 (x, y) ， Γ 的切線的斜率為 $15x^3\sqrt{1+x^2}$ 。 Γ 的 y 截距為 2 。 求 Γ 的方程。

(7 分)

設 $x = \tan\theta$, $dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \tan^3\theta\, \sec\theta \cdot \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} \cdot \frac{1}{\cos^3\theta}\, d\theta$$

~~設 $x = \sqrt{2}\sin x$, $dx =$~~

設 $x = \tan\theta$ $dx = \sec^2\theta d\theta$

$$\int x^3 \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$= \int \tan^3\theta \cdot \sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \int \tan^3\theta \cdot (1+\tan^3\theta)\, d\theta$$

$$= \int \tan^3\theta\, d\theta + \int \tan^6\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4\theta + \frac{1}{7}\tan^7\theta + C$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

b) $\int_0^2 15x^3\sqrt{1+x^2}$

$=15\int_0^2 x^3\sqrt{1+x^2}$ ~~由 a)~~

$=15\int$ 由 a)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n， $\sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$ 。

(b) 利用 (a)，計算 $\sum_{k=333}^{555} \left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right)$ 。

(7 分)

a) 設 $P(n): \sum_{k=1}^{n} k(k+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$

当 $n=1$ 时，左方 $=5$，右方 $=5$，左方=右方，成立.

設 $n=h$ 时亦成立，则: $\sum_{k=1}^{h} k(k+4) = \frac{h(h+1)(2h+13)}{6}$ *.

当 $n=h+1$ 时：

$\cancel{\sum k(k+4)} = \frac{h(h+1)(2h+13)}{6} + \cancel{\frac{(h+1)(h+2)(2h+15)}{6}}$

$\cancel{\frac{2h^3+15h^2+13h+30}{6}}$

$\cancel{\frac{h(h+1)(2h+13)}{6} + \frac{30}{6}}$

$\cancel{= \frac{2h^3+}{6}}$

$\frac{h(h+1)(2h+13)}{6} + \frac{6h(h+4)}{6}$ 自 *

$\cancel{= \frac{2h^3+15h^2+19h^2+24h}{6}}$

$= \frac{2h^3+21h^2+37h}{6}$

写於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\text{右} = \frac{(h+1)(h+2)(2h+13)}{6}$$

$= \text{右}h$

$\therefore P(h)$ 成立

根据数学归纳法，$P(n)$ 对所有正整数 n 成立。

b) $$\sum_{k=333}^{555} \left(\frac{k}{112}\right)\left(\frac{k+4}{223}\right)$$

$$= \frac{1}{24976} \cdot (k)(k+4)$$

$$= \frac{1}{24976} \cdot \frac{555(556)(1123)}{6} \quad (\text{用 a})$$

$$= \frac{57755890}{24976}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 定義 $M=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$。設 $X=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}$ 為一非零的實矩陣使得 $MX=XM$。

(a) 以 a 表 b 及 c。

(b) 證明 X 為一非奇異矩陣。

(c) 將 X 的轉置矩陣記為 X^T。以 a 表 $(X^T)^{-1}$。

(8 分)

a) $MX=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7a+3b & 42a+3c\\ -a+5b & -6a+5c\end{pmatrix}$

$XM=\begin{pmatrix}a & 6a\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7a-6a & 3a+30a\\ 7b-c & 3b+5c\end{pmatrix}$

$\because MX=XM$

$\therefore a=7a+3b \qquad 33a=42a+3c$

$-6a=3b \qquad \cancel{41a=3c} \quad -9a=3c$

$-2a=b \qquad \cancel{-\frac{41}{3}a=c} \quad -3a=c$

b) 由a可知：$\begin{pmatrix}a & 6a\\ -2a & -3a\end{pmatrix}$

$\because \det=-3a^2-12a^2$

$=-15a^2<0$

$\therefore$ X为一个非奇異矩陣.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

c) 由(b)可知 $\det = -15a^2$

$$(X^T)^{-1} = (X^{-1})^T$$

$$= \left[\frac{1}{\det}\begin{pmatrix} a & 6a \\ -2a & -3a \end{pmatrix}^T\right]^T$$

$$= \left[\frac{1}{-15a^2}\begin{pmatrix} -3a & -2a \\ 6a & a \end{pmatrix}\right]^T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5a} & \frac{2}{15a} \\ \frac{-2}{5a} & -\frac{1}{15a} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5a} & \frac{-2}{5a} \\ \frac{2}{15a} & -\frac{1}{15a} \end{pmatrix}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 對所有實數 x，定義 $f(x)=\dfrac{A}{x^2-4x+7}$，其中 A 為一常數。已知 $f(x)$ 的極值為 4。

(a) 求 $f'(x)$。

(b) 某人宣稱 $y=f(x)$ 的圖像有至少兩漸近線。你是否同意？解釋你的答案。

(c) 求 $y=f(x)$ 的圖像的拐點。

(8 分)

a) ~~當 f(x)~~ ~~極值~~ ~~由 f(4)~~

$$f(4)=\frac{A}{7}$$

$$28=A$$

$$\therefore f'(x)=\frac{0-(2x-4)\cdot 28}{[x^2-4x+7]^2}$$

$$=\frac{-56x+112}{(x-2)^4+9}$$

b) $\cancel{y=f(x)=f'(x)=\frac{-56x+112}{x^4-16x^3+96x^2+256x+}}$

$$f'(x)=\frac{-56x+112}{x^4-8x^3+24x^2+32x+16+9}$$

$$=\frac{-56+\frac{112}{x}}{x^3-8x^2+24x+32+\frac{25}{x}}$$

$\therefore y=-56$ 是其中一條漸近線.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

c) $$f''(x) = \frac{-56\cdot(x-2)^4\cdot 9 - 4(x-2)^3\cdot(-56x+112)}{[(x-2)^4+9]^2}$$

$$f''(x) = 0$$

$$(x-2)^3(-504x+1008+224x-448)=0$$

$$(x-2)^3(-280x+560)=0$$

$\therefore x_1=2$, $x_2=2$

把 $x=2$ 代入 $f(x)=\frac{3}{28}$

$\therefore$ 拐點 $\left(2, \frac{3}{28}\right)$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

9. 考慮曲線 $C: y = \ln\sqrt{x}$ ， 其中 $x > 1$ 。 設 P 為 C 上的一動點。 C 在 P 的法線與 x 軸相交於點 Q ， 而通過 P 的垂直線與 x 軸相交於點 R 。

   (a) 將 P 的 x 坐標記為 r 。 證明 Q 的 x 坐標為 $\dfrac{4r^2+\ln r}{4r}$ 。 (3 分)

   (b) 求 ΔPQR 的最大面積。 (5 分)

   (c) 設 O 為原點。 已知 OP 以不超過每分鐘 $32e^2$ 單位的速率增加。 某人宣稱當 P 的 x 坐標為 e 時， ΔPQR 的面積以低於每分鐘 2 平方單位的速率增加。 該宣稱是否正確？ 解釋你的答案。 (4 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. (a) (i) 證明 $\int \sin^4 x\,dx = \frac{-\cos x\sin^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$ 。

(ii) 計算 $\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$ 。

(5 分)

(b) (i) 設 $f(x)$ 為一連續函數使得對所有實數 x ， $f(\beta - x) = f(x)$ ， 其中 β 為一常數。 證明 $\int_0^{\beta} x f(x)\,dx = \frac{\beta}{2}\int_0^{\beta} f(x)\,dx$ 。

(ii) 計算 $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$ 。

(5 分)

(c) 考慮曲線 $G: y = \sqrt{x}\sin^2 x$ ， 其中 $\pi \le x \le 2\pi$ 。 設 R 為 G 與 x 軸圍成的區域。求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。 (3 分)

a) i) $\int \sin^4 x\,dx$

$= \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x\,dx$

$= \int (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x)$

ii) $\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$

$= \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx + \left[\frac{-\cos x\sin^3 x}{4}\right]_0^{\pi}$ 由 a)

$= \left[\frac{3}{4}\cdot(-\frac{1}{3}\cos^3 x)\right]_0^{\pi} + 0$

$= -\frac{1}{4}(-1)$

$= \frac{1}{4}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases} x + ay + 4(a+1)z = 18 \\ 2x + (a-1)y + 2(a-1)z = 20 \\ x - y - 12z = b \end{cases}，其中\ a,b\in\mathbf{R}\ 。$$

(i) 假設 (E) 有唯一解。

(1) 求 a 值的範圍。

(2) 解 (E) 。

(ii) 假設 $a=3$ 且 (E) 有解。

(1) 求 b 。

(2) 解 (E) 。

(9 分)

(b) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(F):\begin{cases} x + 3y + 16z = 18 \\ x + y + 2z = 10 \\ x - y - 12z = s \\ 2x - 5y - 45z = t \end{cases}，其中\ s,t\in\mathbf{R}\ 。$$

假設 (F) 有解。求 s 及 t 。

(3 分)

a) i) 1) $\cancel{\begin{vmatrix} 1 & a & 4(a+1) \\ 2 & (a-1) & 2(a-1) \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix}} = 0$

~~$= -12(a-1) + 2a(a-1) - 8(a+1) - (a-1)4(a+1)$~~

$+24a$

$\begin{vmatrix} 1 & a & 4a+4 \\ 2 & (a-1) & 2a-2 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} \neq 0$

$\sim \begin{vmatrix} 0 & a+1 & 4a+16 \\ 0 & a+1 & 2a+22 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$= (a+1)(2a+22) - (a+1)(4a+16)$

$= (a+1)(6-2a)$

$(a+1)(6-2a) \neq 0$

$a_1 \neq -1,\ a_2 \neq 3$

(2) 当$a=-1$时，解(E)：$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 18 \\ 2 & -2 & -4 & 20 \\ 1 & -1 & -12 & 6 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 18 \\ 2 & -2 & -4 & 20 \\ -5 & 5 & 0 & b-60 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 18 \\ 2 & -2 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & b+30 \end{array}\right)$

设 $y=t$

则 $x = 18+t$

$z = \frac{9}{2}$

ii) $a=3$时：$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 2 & 2 & 4 & 20 \\ 1 & -1 & -12 & b \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 0 & -4 & -28 & -16 \\ 0 & -4 & -28 & b-18 \end{array}\right)$

∵ 第二行与第三行相同

∴ $b-18=-16 \quad b=2$

写於邊界以外的答案，將不予評閱。

(2) 解 (E)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 0 & -4 & -28 & -16 \\ 0 & -4 & -28 & -16 \end{array}\right)$$

設 $z = t$

$y = 4 - 7t$

$x = 6 + 5t$

解為 $\begin{cases} x = 6+5t \\ y = 4-7t \\ z = t \end{cases}$

其中 t 是任意實數.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & -12 & s \\ 2 & -5 & -45 & t \end{array}\right)$$

~~由 (a)(i)~~

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 0 & -2 & -14 & -8 \\ 0 & -4 & -28 & s-18 \\ 0 & -11 & -77 & t-36 \end{array}\right)$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 16 & 18 \\ 0 & -4 & -28 & -16 \\ 0 & -4 & -28 & s-18 \\ 0 & -4 & -28 & \frac{4t-36}{7} \end{array}\right)$$

$\therefore s-18=-16$

$s=2$

$\frac{4t-36}{7}=-16$

$4t-36=-112$

$4t=-76$

$t=-19$

$\therefore \begin{cases} s=2 \\ t=-19 \end{cases}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 點 A、點 B、點 C 及點 D 的位置向量分別為 $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$、$-\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$、$7\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ 及 $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$。將包含 A、B 及 C 的平面記為 Π。設 E 為 D 在 Π 上的投影。

(a) 求

(i) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，

(ii) 四面體 $ABCD$ 的體積，

(iii) $\overrightarrow{DE}$。

(5 分)

(b) 設 F 為 BC 上的一點使得 DF 垂直於 BC。

(i) 求 $\overrightarrow{DF}$。

(ii) $\overrightarrow{BC}$ 是否垂直於 $\overrightarrow{EF}$？解釋你的答案。

(5 分)

(c) 求 ΔBCD 與 Π 間的交角。(3 分)

a) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ $\quad$ $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$

$= -5\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$ $\quad$ $= 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = -15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$

ii) $\frac{1}{6} \cdot |\vec{AB}| \times |\vec{AC}|$

$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2}$

$= \frac{1}{6} \cdot 25$

$= \frac{25}{6}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

iii) ~~設 $\overrightarrow{DE}$~~ 設 OE: $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}$

$=(x-3)\vec{i}+(y+2)\vec{j}+(z+5)\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{DE}|=\frac{25}{6}$

b) $\because DF\perp BC$

$\therefore \overrightarrow{DF}\times\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-8\vec{i}+4\vec{j}-8\vec{k}$

設 $\overrightarrow{OF}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}$

$=(x-3)\vec{i}+(y+2)\vec{j}+(z+5)\vec{k}$

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -8 & 4 & 8\\ (x-3) & y+2 & z+5\end{vmatrix}$$

$4(z+5)=0$ $\quad 8(x-3)=0$ $\quad -8(y+2)=0$

$z=-5$ $\quad x=3$ $\quad y=-2$

$\therefore \overrightarrow{DF}=-8\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。