

數學 必修部分

試卷一

試題答題簿

本試卷必須用中文作答

兩小時十五分鐘完卷

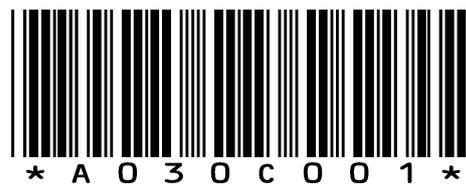
(上午八時三十分至上午十時四十五分)

考生須知

- (一) 宣布開考後，考生須首先在第1頁之適當位置填寫考生編號，並在第1、3、5、7、9及11頁之適當位置貼上電腦條碼。
- (二) 本試卷分**三部**，即甲部(1)、甲部(2)和乙部。
- (三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
- (四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。
- (五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
- (六) 除特別指明外，數值答案須用真確值，或準確至三位有效數字的近似值表示。
- (七) 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
- (八) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



甲部(1) (35分)

1. 令 b 成為公式 $\frac{a+4}{3} = \frac{b+1}{2}$ 的主項。 (3分)

$$\begin{aligned}\frac{a+4}{3} &= \frac{b+1}{2} \\ 2a+8 &= 3b+3 \\ 3b &= 2a+5 \\ b &= \frac{2a+5}{3}\end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 化簡 $\frac{xy^7}{(x^{-2}y^3)^4}$ ，並以正指數表示答案。 (3分)

$$\begin{aligned}&\frac{xy^7}{(x^{-2}y^3)^4} \\ &= \frac{xy^7}{x^{-8}y^{12}} \\ &= \frac{x^9y^7}{y^{12}}\end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. (a) 將 265.473 上捨入至最近的整數。
 (b) 將 265.473 下捨入至一位小數。
 (c) 將 265.473 捨入至二位有效數字。

(3 分)

a) 266

b) 265.4

c) 270

4. 某盒子中有 n 個白球、5 個黑球及 8 個紅球。若從該盒子中隨機抽出一個球，則抽出紅球的概率為 $\frac{2}{5}$ 。求 n 的值。(3 分)

$$\frac{8}{n+5+8} = \frac{2}{5}$$

$$40 = 2(n+13)$$

$$2n+26=40$$

$$2n=14$$

$$n=7$$

∴ 共有 7 個。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 某花瓶的標價較其成本高 30%。該花瓶以其標價六折售出並虧蝕 \$88。求該花瓶的標價。(5分)

設花瓶的成本為 x ，標價便為 $1.3x$

$$1.3x \cdot 0.6 - x = -88$$

$$-0.22x = -88$$

$$x = 400$$

$$\text{標價} = 400 \times 1.3 = 520$$

∴ 標價為 \$520

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 圖 1 中， $ABCDE$ 為一圓。已知 $AB \parallel ED$ 。 AD 與 BE 相交於點 F 。

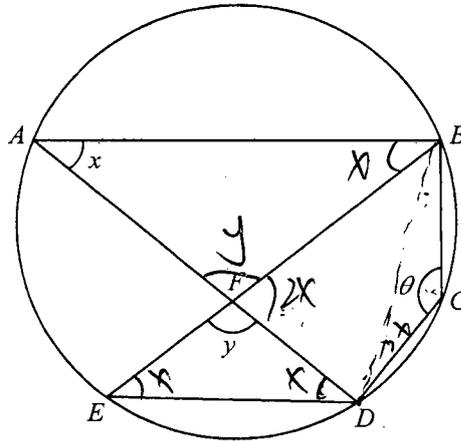


圖 1

以 θ 表 x 及 y 。如圖所示

(5 分)

x 是由弧 DCB 的半數

和 $\angle BDC + \angle CBD$ 的角及由弧 CD 和弧 CB 的半數

$$\therefore \angle BDC + \angle CBD = \angle AFB = x$$

$$\therefore \theta = 180 - x$$

$$x = 180 - \theta$$

$$y = 180 - 2x$$

$$y = 180 - 2(180 - \theta)$$

$$= 180 - 360 + 2\theta$$

$$y = 2\theta - 180$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 某汽車以平均速率 72 km/h 由 P 城駛至 Q 城，該汽車然後以平均速率 90 km/h 由 Q 城駛至 R 城。已知該汽車在整段行程中以 161 分鐘行駛 210 km。該汽車由 P 城駛至 Q 城需時多久？ (5分)

設由 P 城駛至 Q 城需了 x 分鐘，便由 Q 城駛至 R 需了 $161-x$ 分鐘

$$72 \times \frac{x}{60} + 90 \left(\frac{161-x}{60} \right) = 210$$

$$12x + 241.5 - 1.5x = 210$$

$$-0.3x = -31.5$$

$$x = 105 \text{ (分鐘)}$$

∴ 由 P 城駛至 Q 城需 105 分鐘。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 下表顯示一些家庭的子女人數的分佈：

子女人數	0	1	2	3	4
家庭數目	k	2	9	6	7

已知 k 為一正整數。

(a) 若該分佈的眾數為 2，寫出

(i) k 的最小可取值；

(ii) k 的最大可取值。

(2分)

(b) 若該分佈的中位數為 2，寫出

(i) k 的最小可取值；

(ii) k 的最大可取值。

(2分)

(c) 若該分佈的平均值為 2，求 k 的值。

(2分)

a) i) $k=2$ ii) 9

b) i) $k=3$ ii) 23

$$\frac{k \times 0 + 2 \times 1 + 9 \times 2 + 6 \times 3 + 7 \times 4}{k + 2 + 9 + 6 + 7} = 2$$

$$66 = 2k + 48$$

$$2k = 18$$

$$k = 9$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 設 $f(x) = 4x(x+1)^2 + ax + b$ ，其中 a 及 b 均為常數。已知 $x-3$ 為 $f(x)$ 的因式。當 $f(x)$ 除以 $x+2$ 時，餘數為 $2b+165$ 。

(a) 求 a 及 b 。 (3分)

(b) 某人宣稱方程 $f(x) = 0$ 有至少一個無理根。你是否同意？試解釋你的答案。 (4分)

$$\begin{aligned} \text{a) } f(0) &= 4(0)(0+1)^2 + a(0) + b & f(-2) &= 4(-2)(-2+1)^2 - 2a + b \\ f(3) &= 4(3)(3+1)^2 + 3a + b & 2b + 165 &= -8 - 2a + b \\ 0 &= 12 + 3a + b & 2a + b &= -173 \quad \text{---(2)} \\ 3a + b &= -12 \quad \text{---(1)} \end{aligned}$$

$$\text{將 (1) - (2): } 3a + b - 2a - b = -12 - (-173)$$

$$a = -19$$

$$\text{將 } a = -19 \text{ 代入 (1)}$$

$$3 \times (-19) + b = -12$$

$$b = -135$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= 4(0)(0+1)^2 - 19x - 135 \\ &= 4x(x^2 + 2x + 1) - 19x - 135 \\ &= 4x^3 + 8x^2 + 4x - 19x - 135 \\ &= 4x^3 + 8x^2 - 15x - 135 \\ &= (x-3)(4x^2 + 20x + 45) \\ &\therefore (4x^2 + 20x + 45) \text{ 無解} \\ &\therefore \text{錯誤} \end{aligned}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. 圖 2 中， $ABCD$ 為一梯形，且 $\angle ABC = 90^\circ$ 及 $AB \parallel DC$ 。 E 為 BC 上的一點使得 $\angle AED = 90^\circ$ 。

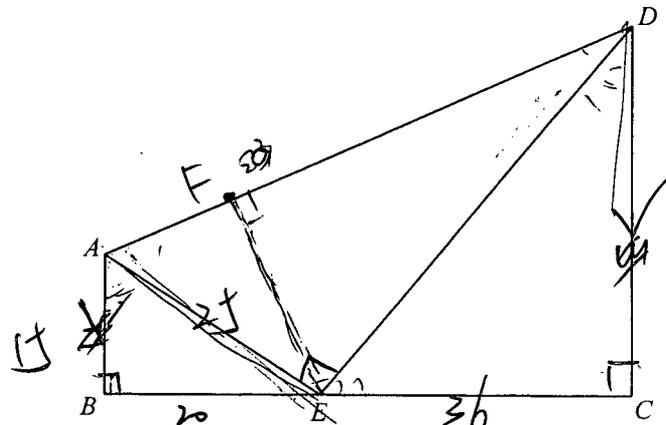


圖 2

- (a) 證明 $\triangle ABE \sim \triangle ECD$ 。 (2分)
- (b) 已知 $AB = 15 \text{ cm}$ 、 $AE = 25 \text{ cm}$ 及 $CE = 36 \text{ cm}$ 。
- (i) 求 CD 的長度。
- (ii) 求 $\triangle ADE$ 的面積。
- (iii) AD 上是否有一點 F 使得 E 與 F 間的距離少於 23 cm ？試解釋你的答案。

(6分)

A) $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $AB \parallel DC$, $AB \perp BC$, $CD \perp BC$
 $\angle BAE + \angle EAD + \angle ADE + \angle EDC = 180^\circ$ (同旁內角互補, $AB \parallel CD$)
 而 $\angle EAD + \angle ADE = 90^\circ$ (三角形內角和)
 $\therefore \angle BAE + \angle EDC = 90^\circ$
 而 $\angle BAE + \angle CED = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \angle BAE + \angle EDC$
 $\therefore \angle BAE = \angle CED \therefore \triangle ABE \sim \triangle ECD$ (AA)

B i) $BE = \sqrt{25^2 - 15^2}$ (畢氏定理)
 $= 20$

$\frac{CD}{EC} = \frac{BE}{AB}$ (全等三角形對應邊成比例)

$\frac{CD}{36} = \frac{20}{15}$
 $CD = 48 \text{ cm}$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } DE &= \sqrt{20^2 + 40^2} & \therefore \triangle ADE \text{ 的面積} &= \frac{1}{2} \times DE \times \text{height} \\
 &= \sqrt{20^2 + 40^2} & &= \frac{1}{2} \times 60 \times 20 \\
 &= 60 \text{ cm} & &= 750 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

iii) 如圖所示, P 點位於 AD 上, 令 PE ⊥ AD.

$$\because AE = AE \text{ (公共邊)}$$

$$\angle ABE = \angle AFE = 90^\circ \text{ (垂直, } AB \perp BE, AD \perp FE)$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE \text{ (AAS)}$$

$$\therefore FE = BE = 20 \text{ cm}$$

$$20 \text{ cm} < 23 \text{ cm}$$

\therefore 同意有一點 P 令 PE 距離少於 23 cm.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

14. 一底半徑為 8 cm 及高為 64 cm 的直立圓柱形的容器與一底半徑為 20 cm 及高為 60 cm 的倒置直立圓錐形的器皿均鉛垂放置。該容器載滿了水。現將該容器內的水倒入該器皿內。

- (a) 求該器皿內水的體積，答案以 π 表示。 (2分)
- (b) 求該器皿內水的深度。 (4分)
- (c) 若將一半徑為 14 cm 的實心金屬球體隨後放進該器皿內，且該球體完全浸入水中，水會否溢出？試解釋你的答案。 (3分)

a) $\pi r^2 \cdot h = \text{體積}$ b) 器皿內水體積: $20^2 \pi \cdot 60 \times \frac{1}{3}$
 $\text{體積} = 8^2 \cdot 64 \pi$ $= 8000\pi$
 $= 4096\pi \text{ cm}^2$



器皿內水體積: $20^2 \pi \cdot h \times \frac{1}{3}$
 $= 4096\pi$

$$\frac{8000\pi}{4096\pi} = \left(\frac{20}{h}\right)^3$$

$$\frac{125}{64} = \frac{21600}{h^3}$$

$$h^3 = 110592$$

$$h = 48 \text{ cm}$$

\therefore 器皿內水深 48 cm。

c) 球體體積: $\frac{4}{3}\pi r^3$
 $= \frac{4}{3}\pi \cdot 14^3$
 $= 3658.667\pi$
 $\approx 3659\pi \text{ cm}^3$

$$3659\pi + 4096\pi = 7755\pi \text{ cm}^3$$

$$7755\pi < 8000\pi$$

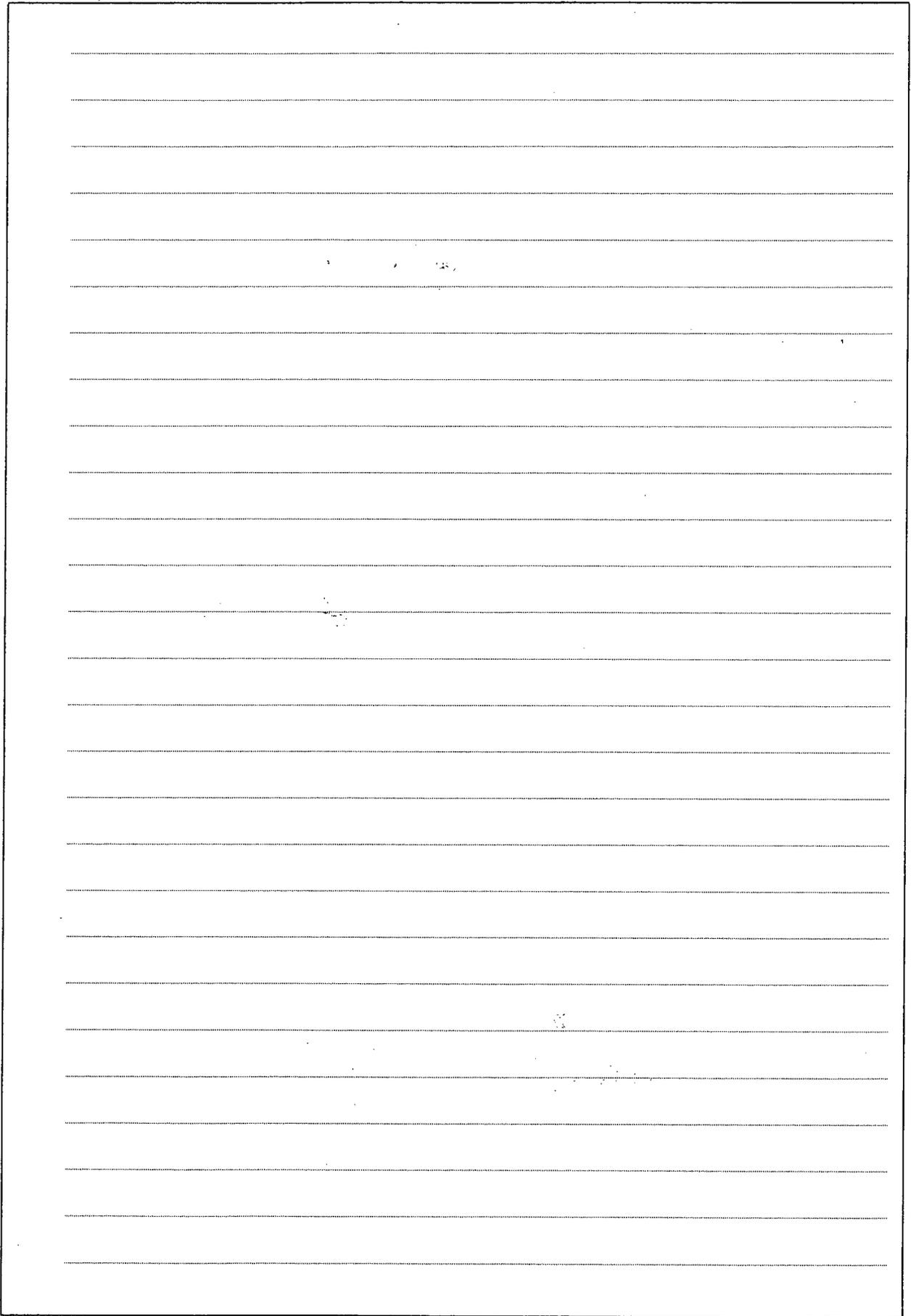
\therefore 不會溢出

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (35 分)

15. 一個八位電話號碼由 2、3、4、5、6、7、8 及 9 的排列所組成。

(a) 可組成多少個不同的八位電話號碼？ (1 分)

(b) 若八位電話號碼的第一個位及最後一個位均為奇數，則可組成多少個不同的八位電話號碼？ (2 分)

a) $P_8^8 = 40320$ (個)

b) $C_1^4 \cdot C_1^2 \cdot C_6^6 \cdot 6! = 51840$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

16. 某等比數列的第 3 項及第 4 項分別為 720 及 864。

(a) 求該數列的第 1 項。 (2 分)

(b) 求 n 的最大值使得第 $(n+1)$ 項與第 $(2n+1)$ 項之和小於 5×10^{14} 。 (3 分)

$$a) \quad r = \frac{S_{40}}{S_{39}} = \frac{864}{720} = 1.2$$

$$a = \frac{720}{(1.2)^2} = 500 \quad \therefore \text{第 1 項為 } 500$$

$$b) \quad ar^n + ar^{(2n)} < 5 \times 10^{14}$$

$$ar^n + ar^n \cdot r^n < 5 \times 10^{14}$$

$$ar^n (1 + r^n) < 5 \times 10^{14}$$

$$r^n (1 + r^n) < 1 \times 10^{12}$$

$$r^n + r^{2n} < 10^{12}$$

$$\log r \cdot r^{2n} < 12$$

$$3n \log r < 12$$

$$3n < \frac{12}{\log r}$$

$$3n < 151.5110376$$

$$n < 50.5037192$$

$\therefore n$ 的最大值為 50。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

17. (a) 圖 3(a) 中， $ABCD$ 為一紙卡，其形狀為平行四邊形。已知 $AB = 60$ cm， $\angle ABD = 20^\circ$ 及 $\angle BAD = 120^\circ$ 。

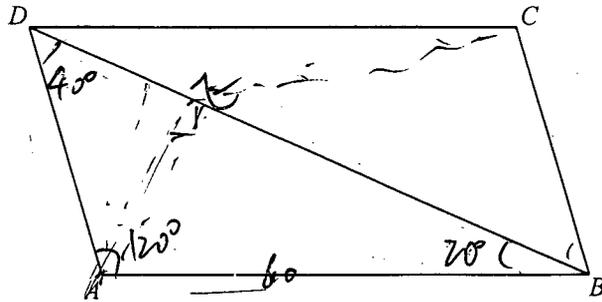


圖 3(a)

求 AD 的長度。 (2分)

- (b) 將圖 3(a) 中的紙卡沿 BD 摺起，使得 A 與 C 間的距離為 40 cm (見圖 3(b))。

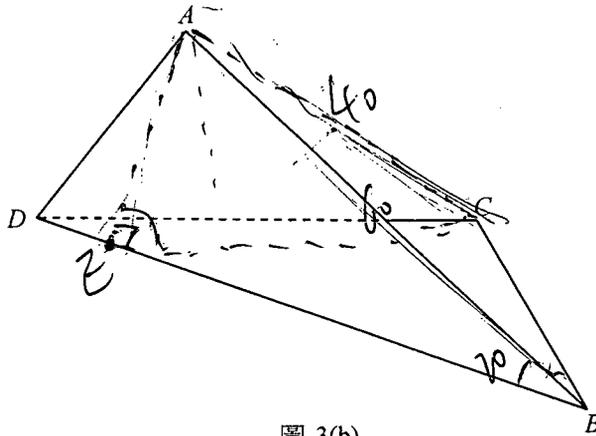


圖 3(b)

- (i) 求 $\angle ABC$ 。
 (ii) 求平面 ABD 與平面 BCD 間的交角。

(5分)

a) $\angle ADB = 180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ$ (Δ 內角和)

$$\frac{AD}{\sin 20^\circ} = \frac{AB}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AD}{\sin 20^\circ} = \frac{60}{\sin 40^\circ}$$

$AD = 31.9$ (保留三位有效數字)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

67) 如圖所示: $AC = 40 \text{ cm}$, $AB = 60 \text{ cm}$

$\therefore AC \perp CD$ 是平行四邊形

$\therefore CB = AD = 31.9 \text{ cm}$

$$40^2 = 60^2 + 31.9^2 - 2 \times 60 \times 31.9 \times \cos \angle ABC$$

$(20 \times 31.9 \times \cos \angle ABC = 3019.2 \approx 6298)$

$$\cos \angle ABC = 0.789095$$

$$\angle ABC = 37.992$$

$\approx 38.0^\circ$ (準確至三位有效數字)

(ii) 如圖所示: 連接 AE , 使 $AE \perp DB$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

18. 已知 $f(x)$ 的一部分隨 x^2 正變，而另一部分則隨 x 正變。假定 $f(2)=60$ 及 $f(3)=99$ 。

(a) 求 $f(x)$ 。 (3分)

(b) 設 Q 為 $y=f(x)$ 的圖像的頂點及 R 為 $y=27-f(x)$ 的圖像的頂點。

(i) 利用配方法，求 Q 的坐標。

(ii) 寫出 R 的坐標。

(iii) 點 S 的坐標為 $(56,0)$ 。設 P 為 $\triangle QRS$ 的外心。描述 P 、 Q 與 R 之間的幾何關係。試解釋你的答案。

(5分)

$$1) f(x) = k_1 x^2 + k_2 x$$

$$f(2) = 60$$

$$60 = 4k_1 + 2k_2 \quad \text{--- (1)}$$

$$f(3) = 99$$

$$99 = 9k_1 + 3k_2 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{(2)}{3} - \frac{(1)}{2} = \frac{99}{3} - \frac{60}{2} = 3k_1 + k_2 - 2k_1 - k_2$$

$$3 = k_1$$

$$k_1 = 3$$

$$k_1 = 3 \text{ 代入 (1)}$$

$$60 = 4 \times 3 + 2k_2$$

$$2k_2 = 48$$

$$k_2 = 24$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + 24x$$

$$b) i) y = 3x^2 + 24x$$

$$= 3(x^2 + 8x)$$

$$= 3(x^2 + 8x + 4^2 - 4^2)$$

$$= 3(x+4)^2 - 48$$

$$\therefore Q \text{ 坐標 } (-4, -48)$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

$$ii) y = -27 = f(x)$$

$$= -f(x) + 27$$

$$\therefore -f(x)$$

\therefore 坐標由 $(-4, -48)$ 沿 y 軸反射至 $(-4, 48)$

$$- \therefore -f(x) + 27$$

\therefore 坐標向上平移 27 至 $(-4, 75)$

\therefore 只含 $(-4, 75)$

$$iii) QR \text{ 弦長 } (8 - (-48)) = 123$$

$$PQ \text{ 弦長 } : \sqrt{(-4-56)^2 + (-48-0)^2} = 76.2371$$

$$PR \text{ 弦長 } : \sqrt{(-4-56)^2 + (75-0)^2} = 96.04686$$

$$QR^2 = 15129$$

$$PQ^2 + PR^2 = 15129$$

$\therefore \triangle RPQ$ 是直角三角形
其中 $PR \perp PQ$ 。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

19. 圓 C 的圓心的坐標為 $(8, 2)$ 。將 C 的半徑記為 r 。設 L 為直線 $kx - 5y - 21 = 0$ ，其中 k 為一常數。已知 L 為 C 的切線。

(a) 求 C 的方程，答案以 r 表示。由此，以 k 表 r^2 。 (4分)

(b) L 通過點 $D(18, 39)$ 。

(i) 求 r 。

(ii) 已知 L 與 y 軸相交於點 E 。設 F 為一點使得 C 為 $\triangle DEF$ 的內切圓。 $\triangle DEF$ 是否一鈍角三角形？試解釋你的答案。

(8分)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } C \text{ 的方程: } (x-8)^2 + (y-2)^2 &= r^2 \\
 x^2 - 16x + 64 + y^2 - 4y + 4 &= r^2 \\
 x^2 + y^2 - 16x - 4y + 68 - r^2 &= 0 \\
 kx - 5y - 21 &= 0 \\
 k &= \frac{5y+21}{x}
 \end{aligned}$$

將其代入 C

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{5y+21}{k}\right)^2 + y^2 - 16\left(\frac{5y+21}{k}\right) - 4y + 68 - r^2 &= 0 \\
 r^2 = \frac{(5y+21)^2}{k^2} + y^2 - \frac{80y+336}{k} - 4y + 68
 \end{aligned}$$

$$\text{b) i) } k(18) - 5(39) - 21 = 0$$

$$\Rightarrow k = 216$$

$$k = 12$$

$$r^2 = \frac{(5 \times 39 + 21)^2}{12^2} + 39^2 - \frac{80 \times 39 + 336}{12} - 4 \times 39 + 68$$

$$= 37.5976 \approx 37.6 \text{ (只取两位有效数字)}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

- 試卷完 -

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

評語

考生能成功運用代數技巧解答甲部題目，考生亦能應用統計學概念及有關公式求取所需結果。另外，考生能運用坐標幾何公式、求積法公式、正弦公式、餘弦公式及演繹幾何法，處理幾何題目。整體而言，考生能在大部分情境中成功地運用數學概念解決問題，顯示考生對必修部分的三個不同範疇的數學概念有紮實的認識及理解。

此外，考生能在第7、8、9、14及18題運用方程、不等式及數學符號清晰作答及證明命題，顯示考生具備準確應用數學語言及符號溝通和表達意念的能力。

再者，考生在第13、14及18題運用前面部分所得的結果，邏輯地推論，並提供部分理據支持所得的結論。

總括而言，考生對必修部分的數學概念有紮實的認識及理解，且能準確運用數學語言及符號溝通和表達意念。考生不但具備辨認規律及作出概推的能力，也具備整合必修部分不同領域的知識及技能去處理課業的能力。