

應用數學

高級程度

目標

本科考試旨在測驗考生對基本的數學及統計學方法的理解程度及應用能力。在數學方法的應用方面，考生須具備特定的理論力學知識，並且對於數學方法本身有充份的理解，足以應用於其他學科，惟在應用於其他學科時則毋須先具備此等學科的知識。考生應具備中學會考數學科課程的學識。考生同時亦應具備下列知識：指數及對數函數、三角學(包括複角公式及和積互變公式)、複數的基本運算(包括標準式及極式)、初等微積分。

試卷形式

本科考試包括兩試卷，每卷三小時，佔分比重相等。每卷皆分兩部。甲部(40%)包括六至八條短題目，必須全部作答。乙部(60%)包括五條長題目，考生須選答四題。

註：除題目指明有特別限制者外，

- a. 考生可採用任何適當方法作答，
- b. 考生可在考試時應用計算機*。

考試範圍

註：1. 以下僅為考試範圍，讀者不應將其理解為確切及詳盡的教學範圍。

2. 讀者須將本課程看成一整體，各段落的長度，與該段落在考試中所佔的比重無關。

*見考試規則第四章第十五節。

試卷一

I. 理論力學

1. \mathbf{R}^2 及 \mathbf{R}^3 中的向量

向量的加法及減法。
純量乘法。
向量的分解。

位置向量及單位向量。

純量積及正交性。
向量積及平行性。

向量函數對純變量的微分。

單位向量 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} 的應用。直線的向量方程。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin\theta \mathbf{n}.$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{不須證明})$$

考生須認識下列公式：

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{u}) = \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{u} + \lambda \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

向量函數對純變量的積分。

2. 靜力學

力。力矩及力偶。
力系的合力。

質點及剛體在共面力系下的平衡。

3. 運動學

質點在平面上的運動。

相對運動。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

不要求線積分的知識。

將一力系約化成一合力及一力偶。

考生須懂得如何由已與的物理情況建立獨立的方程或不等式。

位移、速度及加速度。
角位移、角速度及角加速度。
不包括速度及加速度沿切線及法線的分量。

涉及兩物體運動的簡易問題。

速度及加速度沿向量徑及垂直於向量徑的分解。

下列公式的推演及應用：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta.\end{aligned}$$

不要求軌道問題的詳細知識。

試題不涉及可變質量。

4. 牛頓運動定律

三條運動定律。
功、能、動量及其守恆定律。

質點的直線運動。

簡諧運動。阻尼振動。

質點的平面運動。

重力下的拋體運動。

圓周運動。鉛垂圓周運動。

試題可涉及笛卡兒坐標或極坐標。

不包括在阻尼介質的二維運動。

5. **碰撞**

正碰及斜碰。

彈性及非彈性碰撞。

試題不涉及沖量張力。

恢復係數。

6. **摩擦**

靜摩擦及動摩擦定律。
摩擦係數。摩擦角。

平衡的極限位置。

應用於涉及質點及剛體的靜力及動力問題。

不要求平衡穩定性的知識。

7. **剛體運動**

剛體作為質點體系。
質心。

慣性矩。平行軸及垂直軸定理。

角動量。

動能及勢能。

繞固定軸的剛體運動。

利用對稱性或積分求均勻物體的質心。合成物體的質心。

利用積分求均勻物體的慣性矩。合成物體的慣性矩。

角動量定律。守恆定律。

試卷二

II. 微分方程

以下列出的各類微分方程，考生宜熟悉它們如何由實際情況形成的範例，及註釋方程的解。惟考生對個別實際情況毋須特別知識，試題將給予充分的描述以幫助考生建立有關方程。

1. 一階微分方程

下列方程的解法：

(a) 可分變量方程，

(b) 線性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)。$$

包括積分因子的應用。

考生應能利用已與代換將方程約化成以上任何一類的形式。

2. 二階微分方程

下列方程的解法：

(a) 常係數齊次方程

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c y = 0,$$

包括輔助方程的應用。

(b) 常係數非齊次方程

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x),$$

$f(x)$ 的形式只為 x^n , $\cos px$, $\sin px$, e^{px} , 或以上函數的線性組合。考生應能處理當 p 為輔助方程的根時的情況。應知待定係數法。

考生應能利用已與代換把方程約化成以上任何一類的形式。

考生應能求出齊次及非齊次方程的通解，及初值與邊值問題的解。

(c) 二元一階微分方程組。

試題只涉及可利用消去法約化得出二階線性微分方程的簡單方程組。

III. 數值法

1. 近似

插值多項式。

包括拉格朗日插值多項式及其誤差項。

用泰勒展式求函數的近似。

考生應認識誤差估計。

2. 數值積分

梯形法則及辛卜生法則(亦可譯作森遜法則)及其複合公式。

考生應知誤差估計。不包括誤差項的推演。試題可涉及其他積分法則，惟考生毋須懂得其推演，試題將提供有關的法則。

3. 方程的數值解法

試位法及正割法。

定點迭代法。牛頓法。

考生毋須決定收斂的階。

不須詳細討論誤差估計和收斂。

考生應知誤差估計。

考生應知下列定點迭代法收斂的充份條件：

- (1) 迭代函數 $g(x)$ 在某區間 I 內是連續的及可微分的；
- (2) 對所有在 I 內的 x , $g(x) \in I$;
- (3) 對所有在 I 內的 x 存在一正常數 k 使 $|g'(x)| \leq k < 1$ 。

牛頓法作為定點迭代法的一個特例。

IV. 概率及統計學**1. 基本統計學的度量**

平均值、眾數及中位數。
標準差及方差。

考生須懂得計算兩組或多組數據的組合平均值及方差。

2. 概率定律

樣本點、樣本空間及事件。
等可能事件。
計數法。

排列及組合。

加法及乘法定律。
互斥事件及獨立事件。
條件概率。

貝葉斯定理。

3. 概率分佈

隨機變量。

樹形圖的應用。

考生須知道下列公式：

(i) $P(A') = 1 - P(A)$

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(iii) $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

不要求定理的推演。

離散隨機變量的概率及分佈函數。

連續隨機變量的概率密度及分佈函數。

期望及方差。

考生須知道下列公式：

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$$

其中 X 、 Y 為獨立隨機變量。

二項及正態分佈。

伯努利試驗。二項式概率。
標準正態分佈數表的運用。
正態分佈逼近二項分佈，包括連續校正的應用。
不要求正態分佈的平均值和方差的推演。
考生須知道兩獨立正態分佈的變量的線性組合亦為一正態分佈的變量。
不要求其他概率分佈的特別知識。

4. 統計推斷

利用隨機樣本估計總體平均值。

已知方差的正態總體平均值的置信區間。

假設檢驗。

檢驗統計量、臨界域及顯著性水平的基本概念。
第一類及第二類誤差。試題祇涉及運用正態分佈的單樣本問題。